

3°) Calculer la dérivée $\theta'(x)$. Montrer que cette dérivée a, pour x positif, le signe de : $u(x) = 2(\operatorname{Arctg} x)^2 - x \operatorname{Arctg} x - \frac{x^2}{1+x^2}$

4°) Etudier les variations de $u(x)$.

(Pour étudier le signe de $u'(x)$ il pourra être commode d'introduire une fonction auxiliaire dont la dérivée est rationnelle).

5°) Etudier les variations de θ et construire sa courbe représentative

6°) Montrer qu'il existe sur la courbe (C) représentant la fonction $f(x) = \operatorname{Arctg} x$ un point M d'abscisse positive x et un seul tel que la tangente $\bar{a}(C)$ au point M' d'abscisse $x/2$ soit parallèle à OM .

III. On définit φ par : $\varphi(x) = \frac{4 \operatorname{tg} x}{4 + \operatorname{tg}^2 x} \quad x \in]-\pi/2, +\pi/2[$

1°) Etudier φ et tracer sa courbe représentative.

2°) Etablir que sur $]0, \pi/2[$, l'équation : $\varphi(x) = x$ a une unique solution α .

3°) On définit une suite réelle par
$$\begin{cases} u_0 = \pi/4 \\ u_n = \varphi(u_{n-1}) \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Démontrer que cette suite est convergente et a pour limite α .

4°) Indiquer comment les résultats du III permettent d'établir l'existence et l'unicité d'un réel positif x vérifiant l'équation :

$$\operatorname{Arctg} x = \frac{x}{1+(x/2)^2}$$

Lien avec le II ?