

Corrigé du devoir.

I. 1°. On trouve facilement : $a=1, b=\frac{4}{15}, c=\frac{3}{5}$; la solution est nécessairement unique.
 puis $f(x) = \frac{4}{175} \cdot x^2 + o(x^2) \Rightarrow f'(x)$ admet 0 comme racine $6^a \Rightarrow$ simplifications.

(On peut vérifier en remarquant que : $f'(x) \sim \frac{4}{25} x^6$ et $f''(x) \sim \frac{24}{25} x^5$).

2°. $f(-x) = -f(x)$ et $f'(x) = \frac{4x^6}{25(1+\frac{3}{5}x^2)^2(1+x^2)} = \frac{4x^6}{(5+3x^2)^2(1+x^2)} \sim \frac{4x^6}{25}$.

$\Rightarrow$ Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$

3°. $f''(x) = \frac{24x^5(1+\frac{13}{15}x^2)}{25(1+\frac{3}{5}x^2)^3(1+x^2)^2} = \frac{8x^5(15+13x^2)}{(5+3x^2)^2(1+x^2)^2}$

donc : $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $f''(x)$ a le signe de x .

4°. Asymptote : cherchons la D.L.G. de f au voisinage de $+\infty$.

$\frac{\frac{4}{15}x^3 + x}{\frac{3}{5}x^2 + 1} = \frac{4}{9}x + \frac{25}{27x}$ et $\text{Arctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arctg } \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$.

Donc : $f(x) = \frac{4}{9}x - \frac{\pi}{2} + \frac{52}{25x} + o(\frac{1}{x})$

Tableau de valeurs :

x	f	f'
$\sqrt{3}/3$	$\frac{49}{54\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \approx 2,9 \times 10^{-4}$	$\frac{1}{324} \approx 3,1 \times 10^{-3}$
1	$\frac{19}{24} - \frac{\pi}{4} \approx 6,3 \times 10^{-3}$	$\frac{1}{32} \approx 3,1 \times 10^{-2}$
$\sqrt{3}$	$\frac{9\sqrt{3}}{16} - \frac{\pi}{3} \approx 6,6 \times 10^{-2}$	$\frac{27}{196} \approx 0,14$

$f(3) \approx 0,34$

