

Général de DS

Exercice 1:

$$1^{\circ} M_n(a) = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + r \ln a_i + o(r)) \right]^{1/n} = (1 + r \ln(\prod a_i) + o(r))^{1/n}$$

$$\text{Donc, } \ln(M_n(a)) = \frac{1}{n} \ln(1 + r \ln(\prod a_i) + o(r)) = \frac{1}{n} \ln(\prod a_i) + o(1)$$

$$\text{Conclusion: } \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(a) = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{1/n}$$

Si on prend $f(x) = \frac{1}{x} \ln(x)$, f est concave et on peut alors affirmer que: $f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a_i^x)$ c'est à dire:

$$\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^x\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i \quad \text{ou encore: } M_n(a) \geq M_0(a) \quad (x > 0)$$

$$2^{\circ} \text{ On pose } A = \sup_{i \in [1, n]} a_i : \text{ alors: } M_n(a) \leq \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^x \right]^{1/n} = A$$

$$\text{et } M_n(a) \geq \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A^x \right]^{1/n} = A \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \text{ et quand } n \rightarrow +\infty : \left(\frac{1}{n}\right)^{1/n} \rightarrow 1 \text{ donc}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n(a) = \sup_{i \in [1, n]} a_i ; \text{ de même, on trouverait: } \lim_{n \rightarrow -\infty} M_n(a) = \inf_{i \in [1, n]} a_i$$

$$3^{\circ} (y \ln y)' = \frac{1}{y} > 0, \text{ donc: } \left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) \ln\left(\frac{1}{n} \sum x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum x_i \ln x_i$$

$$\text{Or: } \frac{M'_n(a)}{M_n(a)} = \frac{1}{r^2 \frac{1}{n} \sum a_i^x} \left[\frac{1}{n} \sum a_i^x \ln a_i^x - \left(\frac{1}{n} \sum a_i^x\right) \ln\left(\frac{1}{n} \sum a_i^x\right) \right] \geq 0$$

(en prenant $x_i = a_i^x$) c.q.f.d.

$$4^{\circ} \text{ On a: } \left(\prod_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + b_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i + b_i} \text{ donc } \left(\frac{\prod a_i}{\prod (a_i + b_i)}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum \frac{a_i}{a_i + b_i} \text{ c.q.f.d.}$$

Exercice 2:

$$1^{\circ} a) D_f = [-1/a, 1/a] \text{ et } f'(x) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2x^2}} - \frac{b}{\sqrt{1-b^2x^2}} > 0 : \begin{array}{c|c} x & 0 \\ \hline f & 0 \end{array} \xrightarrow{1/a} \frac{\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{b}{a}$$

donc, f admet une fonction réciproque.

$$b) \sin y = ax \sqrt{1-b^2x^2} - bx \sqrt{1-a^2x^2} \text{ et } \cos y = abx^2 + \sqrt{1-a^2x^2} \sqrt{1-b^2x^2}$$

$$\text{Or: } \left(\frac{\sin y}{x}\right)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos y. \text{ de plus, } y \text{ et } x \text{ sont de même signe sur } D_f \text{ donc, } \frac{\sin y}{x} > 0 \text{ ce qui permet de conclure } g(y) = \frac{\sin y}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos y}}$$

$$2^{\circ} a) b) c) \text{ On pose } x = \text{rg } t/2 \text{ et on remarque que}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \text{ donc: } h(x) = \text{Arccos}(\cos(t - \pi/12))$$

$$\text{avec } t = 2 \text{Arctg } x. \Rightarrow h \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

$$\text{d'où: pour } t > \pi/12 \text{ i.e. } x > \text{rg } \frac{\pi}{24} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} : \begin{array}{l} h(x) = 2 \text{Arctg } x - \pi/12 \\ h(x) = \pi/12 - 2 \text{Arctg } x \end{array}$$

$$\text{et pour } x < \text{rg } \frac{\pi}{24}, x > \text{rg } -\frac{11\pi}{24} :$$

$$h(x) = \frac{23\pi}{12} + 2 \text{Arctg } x, x < \text{rg } -\frac{11\pi}{24}$$

Problème:

$$I \quad a) \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{13} \\ a_{13} & a_{23} & a_{22} & a_{12} \\ a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \text{ A est symétrique par rapport à ses 2 diagonales.}$$

$$b) \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 & a_{12}^2 + a_{23}^2 + a_{22}^2 + a_{13}^2 & \dots \\ a_{12}a_{11} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} + a_{13}a_{14} & 2a_{11}a_{13} + 2a_{22}a_{23} & \dots \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{12} + a_{22}a_{13} + a_{12}a_{14} & \dots & \dots \\ 2a_{11}a_{14} + 2a_{12}a_{13} & \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ Les symétriques constatées sur A persistent pour la matrice B.}$$