

EXERCICES. 32

1°) a) $\ln \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{45} + o(x^4) \Rightarrow \sqrt{\ln \cos x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{45} + o(x^4) \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{45} + o(x^4) \right)$

b) $\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{12} - \frac{x^2}{720} + o(x^2) \leftarrow (5)$

c) $h(x) = \ln \left(e^x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) = \ln \left[e^x \left(1 - e^{-x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right) \right] \leftarrow (6)$
 $= x - e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) = \left[x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + o(x^{n+1}) \right] \text{ car } e^x \rightarrow 1 \text{ qd } x \rightarrow 0.$

2°) On prolonge f par continuité en 0 en posant: $f(0) = -1/2 \leftarrow (1)$

$f(x) = x \varphi(x)$ où $\varphi(x) = 2 \ln |1 - 1/2| + \frac{1}{x-1} \leftarrow (3)$

$\varphi(x) = \frac{x-2}{x(x-1)^2}$

x	$-\infty$	0	α	1	β	$+\infty$
φ	+	-	-	-	+	+
f	$+\infty$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$f(\beta)$	$+\infty$

φ s'annule pour 2 valeurs: $\alpha = 0,323258941 \approx 0,3$

$\beta = 1,397952547 \approx 1,4$

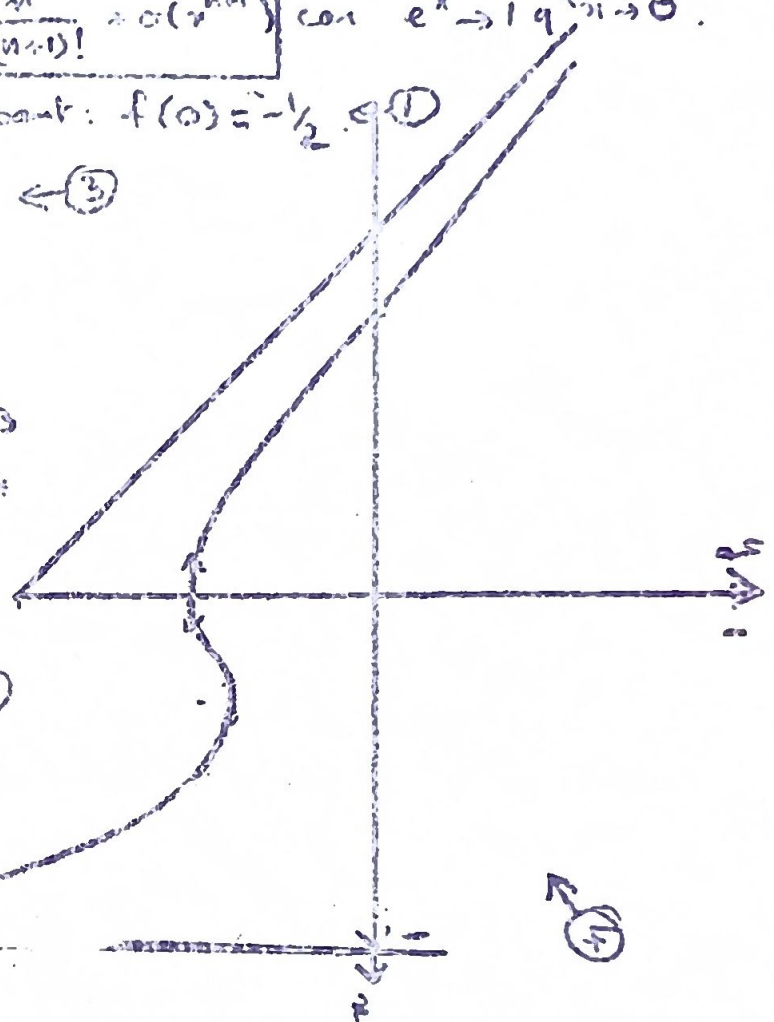
x	$-\infty$	0	α	1	β	$+\infty$
f'	-	0	+	0	-	+
f	$+\infty$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$f(\beta)$	$+\infty$

$\leftarrow (5)$

$f(\alpha) = -0,42279464 \approx -0,42$

$f(\beta) = -2,95540748 \approx -3$

Asymptote: $f(x) = -x - 1 - \frac{1}{3x} + o(1/3) \leftarrow (3)$



PROBLEME. 48

I. (1)

1°) Taylor Lagrange: $f(x) = x f'(0) + \frac{x^3}{6} f'''(\theta x)$. ($f(0) = f''(0) = 0$). $\leftarrow (4)$

2°). Si on écrit la formule des accroissements finis: $f(x) = x f'(x, \theta) \leftarrow (3)$
 et à chaque x , on peut faire correspondre un $\theta \in]0, 1[$.

3°). $f'(u) = f'(0) + \frac{u^2}{2} f'''(\theta' u)$ et en prenant $u = x\theta(x)$.

$\Rightarrow f'(x\theta(x)) = f'(0) + \frac{x^2 \theta(x)^2}{2} f'''(x\theta(x), \theta')$

$\Rightarrow f(x) = x f'(0) + \frac{x^3 \theta(x)^2}{2} f'''(x\theta(x), \theta')$ et en utilisant le 1°, on trouve.

$\theta(x) = \sqrt{\frac{f'''(x\theta(x))}{3f'''(x\theta(x), \theta')}}}$ et comme $f'''(0) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \leftarrow (4)$

II

1°). Toutes les fonctions θ doivent vérifier: $\text{Arctg } x = x \frac{1}{1+x^2 \theta(x)^2}$

d'où: $\theta(x) = \sqrt{\frac{1}{x \text{Arctg } x} - \frac{1}{x^2}}$ et donc, θ est unique. $\leftarrow (4)$

$x \text{Arctg } x$ est paire donc $\theta(x)$ est paire et en vertu du I 3°, $\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$