

II. 47. $g(y) = x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)$.

et donc $y = f \circ g(y) = a_1 (b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)) + a_2 (b_1 y + b_2 y^3 + o(y^3))^2 + a_3 (b_1 y + o(y^3))^3$

Comme 1 D.L. est unique, on obtient

en identifiant :

$$\begin{cases} a_1 b_1 y = y \\ (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) y^2 = 0 \\ (a_1 b_3 + 2 a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{1}{a_1} \\ b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2} \\ b_3 = \frac{2 a_2^2 - a_3 a_1}{a_1^3} \end{cases} \quad (2)$$

Application : $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow g(y) = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} \quad (2)$

On calcule la D.L. de f . $f(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \quad (2) \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3}$.

donc $b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = -\frac{1}{3}$. Calculons b_4 et b_5 :

On vérifie que $b_4 = 0$, pour b_5 , on a : $a_1 b_5 + 3 a_2 b_1^2 b_3 + b_1^5 a_5 = 0 \Rightarrow b_5 = \frac{2}{15}$.

donc : $g(y) = y - \frac{y^3}{3} + \frac{2y^5}{15} + o(y^5) \quad (6)$

2°. Ordre 1 : $f'(0) = a_1 \Rightarrow g$ dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{a_1} \Rightarrow g(y) = \frac{1}{a_1} y + o(y) \quad (2)$

Ordre 2 : $x = g(y) = \frac{1}{a_1} y + \varepsilon_1(y)$: or $y = f(x) = a_1 (\frac{1}{a_1} y + \varepsilon_1(y)) + a_2 (\frac{1}{a_1} y + \varepsilon_1(y))^2 + o(y^2)$

$\Rightarrow y = y + a_1 \varepsilon_1(y) + \frac{a_2}{a_1^2} y^2 + o(y^2) \Rightarrow \varepsilon_1(y) = -\frac{a_2}{a_1^3} y^2 + o(y^2)$. (car $o(y) = o(y^2)$)

d'où : $g(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + o(y^2) \quad (4)$ vrai à l'ordre 2.

Ordre 3 : On remplace $o(y^2)$ par $\varepsilon_2(y)$ et on reporte dans le D.L. à l'ordre 3 de $y = f(x)$

$\Rightarrow y = a_1 (\frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \varepsilon_2(y)) + a_2 (\frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2)^2 + a_3 (\frac{1}{a_1} y)^3 + o(y^3)$ ($\varepsilon_2(y)^2 = o(y^3)$ et de

$\Rightarrow y = y + \underbrace{0}_{\text{calcul fait à l'ordre 2}} y + a_1 \varepsilon_2(y) - (\frac{2 a_2^2}{a_1^6} - \frac{a_3}{a_1^3}) y^3 + o(y^3)$. même : $\varepsilon_2(y)^3 = o(y^3)$)

calcul fait à l'ordre 2 valeur de $\varepsilon_2(y)$ et donc :

$g(y) = \frac{1}{a_1} y - \frac{a_2}{a_1^3} y^2 + \frac{2 a_2^2 - a_3 a_1}{a_1^6} y^3 + o(y^3) \quad (4)$ vrai à l'ordre 3.

Par récurrence : $P_p(Q_p(y)) = y + y^{p+1} A_p(y)$ où A_p est un polynôme ; puis, on

reporte : $x = Q_p(y) + \varepsilon_p(y)$ dans : $y = P_{p+1}(x) + o(x^{p+1})$. ($o(x^{p+1}) = o(y^{p+1})$)

$y = P_{p+1}(Q_p(y) + \varepsilon_p(y)) = P_p(Q_p(y) + \varepsilon_p(y)) + a_{p+1} (Q_p(y) + \varepsilon_p(y))^{p+1} + o(y^{p+1})$

$= P_p(Q_p(y)) + a_1 \varepsilon_p(y) + a_{p+1} \frac{1}{a_1^{p+1}} y^{p+1} + o(y^{p+1})$ (en effet : $\varepsilon_p(y) = y \cdot \varepsilon_0(y)$)

Or : $P_p(y) = A_p(0) + y(-)$.

et on pourra mettre sous les $(\varepsilon_p(y))^{p+1}$ dans $o(y^{p+1})$

d'où : $\varepsilon_p(y) = \frac{1}{a_1} \left[-\frac{a_{p+1}}{a_1^{p+1}} - A_p(0) \right] y^{p+1} + o(y^{p+1})$

Il suffit de calculer $A_p'(0)$ (qui s'exprime en fonction des $a_q, q \leq p$) et on

obtient alors $x = Q_{p+1}(y) + o(y^{p+1})$. vrai à l'ordre $p+1$. (8)

Application : $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{11}{6} x^3 - \frac{25}{12} x^4 + o(x^4) \quad (2)$, comme $f'(0) = 1/2$,

f est strictement croissante dans un voisinage de 0, on peut appliquer le résultat

démontré, d'où : $g(y) = y + \frac{3}{2} y^2 + \frac{8}{3} y^3 + \frac{125}{24} y^4 + o(y^4) \quad (4)$.