

2°) Montrons que θ admet 1 DL à l'ordre n (n quelconque).

$$\frac{x}{\text{Arctg} x} = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{4x^4}{45} + \frac{32x^6}{315} + o(x^7) : \text{cette fonction admet 1 DL à l'ordre } n+2.$$

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{\text{Arctg} x} - 1 \right) = \frac{1}{3} - \frac{4x^2}{45} + \frac{32x^4}{315} + o(x^5) : \text{cette fonction admet 1 DL à l'ordre } n.$$

$$\text{donc } \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{4x^2}{15} + \frac{32x^4}{315} + o(x^5)} \text{ admet 1 DL à l'ordre } n. \quad \leftarrow (6)$$

$$\text{DL à l'ordre 5: } \boxed{\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2x^2}{15} + \frac{32x^4}{315} + o(x^5) \right)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

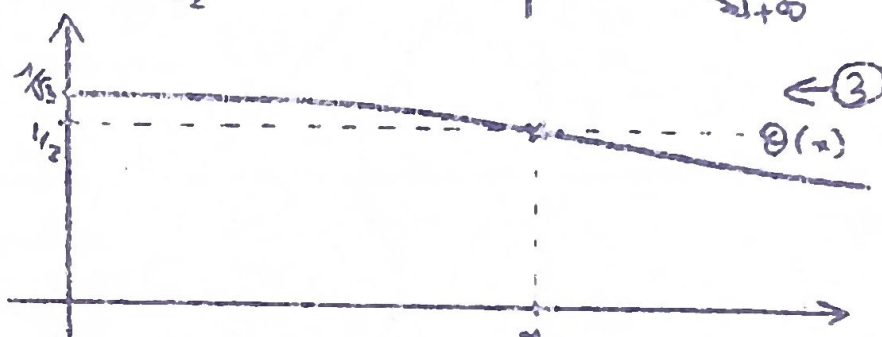
3°) $\theta(x) = \sqrt{v} \Rightarrow \theta'(x) = \frac{v'}{2\sqrt{v}}$ et $v'(x) = \frac{2x u(x)}{(x^2 \text{Arctg} x)^2}$ (on se limite à $\mathbb{R}^+$). $\leftarrow (3)$

Signe de u : $u'(x) = \frac{3-x^2}{1+x^2}$ avec $v(x) = \text{Arctg} x = \frac{x(3+x^2)}{(1+x^2)(3-x^2)}$ $\leftarrow (4)$

$$v'(x) = \frac{-16x^4}{[(1+x^2)(3-x^2)]^2} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \sqrt{3} & +\infty \\ \hline v' & - & - & - \\ v & 0 & 1/2 & +\infty \end{array} \Rightarrow u'(x) < 0.$$

5°) $u(x) < 0 \Rightarrow \theta'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^+$

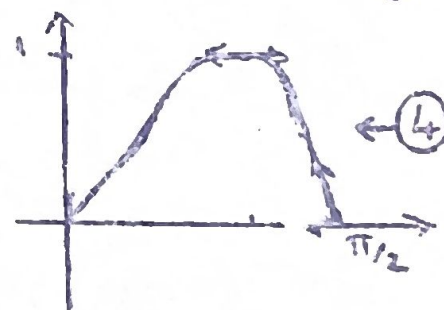
$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & x_0 & +\infty \\ \hline \theta(x) & 1/\sqrt{3} & 1/2 & 0 \end{array}$$



6°) Le point correspond à $\theta = 1/2$ et on l'étude facile ci-dessus, il est obtenu pour $x_0 = 1,2856437475$. $\leftarrow (3)$

III. 14

1°) ψ impaire. $\psi'(x) = \frac{4(4-\text{tg}^2 x)}{(4+\text{tg}^2 x)(1+\text{tg}^2 x)}$ $\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \text{Arctg} 2 & +\infty \\ \hline \psi' & + & 0 & - \\ \psi & 0 & 1 & 0 \end{array}$



2°) Étudions $\psi(x) = \psi(x) - x$:

$$\psi'(x) = \frac{4\text{tg}^2 x - 5\text{tg}^4 x}{(4+\text{tg}^2 x)^2}$$

La racine: $\text{Arctg} \sqrt{\frac{4}{5}} = x_1$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & x_1 & \pi/2 \\ \hline \psi' & + & 0 & - \\ \psi & 0 & \psi(x_1) & -\pi/2 \end{array} \quad \leftarrow (3)$$

Donc: $\psi(x) = 0$ a une racine comprise entre x_1 et $\pi/2$.

i.e. $\psi(x) = x$ " " " " " " " " " " " "

3°) Pour $x = \text{Arctg} 2$: $\psi(x) = 1 - \text{Arctg} 2 < 0 \Rightarrow d < \text{Arctg} 2$. $\leftarrow (4)$

Montrons par récurrence que (u_n) $\nearrow$ et majorée:

$$\psi(d) - \psi(u_0) = (d - u_0) \cdot \psi'(u'_0) : u'_0 < d \Rightarrow \psi'(u'_0) > 0 ; d - u_0 > 0 \Rightarrow d > \psi(u_0) = u_1$$

De même, si $u_n < d < \text{Arctg} 2$ alors $u_{n+1} < d < \text{Arctg} 2$.

$$u_1 > u_0, \text{ on suppose que: } u_{n+1} > u_n \Rightarrow \psi(u_{n+1}) > \psi(u_n) \text{ i.e. } u_{n+1} > u_{n+1}$$

Donc, la suite (u_n) $\nearrow$ et majorée est convergente et sa limite ne peut être que d .

$$d = 0,9097265696 = \text{Arctg} x_0$$

4°) On sait qu'il existe un seul d tel que: $d = \frac{4 \text{tg} d}{4 + \text{tg}^2 d}$; si on pose $x = \text{tg} d$

on en déduit qu'il existe un seul $x_0 \neq 0$ tel que: $\text{Arctg} x = \frac{x}{1 + (x/2)^2}$ $\leftarrow (3)$

lien avec le II: $d = \text{Arctg} x_0$.