

Corrigé du devoir maison (P1)

I. $f = \frac{x+1}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)^3}$. On a: $f + \frac{x+1}{3(x^2-x+1)} = \frac{(x+1)(x^2+x+3)(x^2+3x+3)}{8(x^2-x+1)^3}$.

On pose $Y = X^2$: $g(X) = g_1(Y) = \frac{3-Y}{Y(Y-1)(Y+1)^3} = -\frac{3}{Y} + \frac{1}{4(Y-1)} + \frac{2}{(Y+1)^3} + \frac{5}{2(Y+1)^2} + \frac{11}{4(Y+1)}$

d'où: $g = -\frac{3}{X^2} + \frac{1}{8(X-1)} - \frac{1}{8(X+1)} + \frac{2}{(X^2+1)^3} + \frac{5}{2(X^2+1)^2} + \frac{11}{4(X^2+1)}$ (8)

et $f = -\frac{x+1}{8(x^2-x+1)} + \frac{x+3}{8(x^2+x+1)} + \frac{2x+3}{4(x^2+x+1)^2} + \frac{x}{2(x^2+x+1)^3}$ (11)

$R = \frac{x^5+5}{5(x^4+2x^3+2x^2+x)} = \frac{x-2}{5} + \frac{1}{x} - \frac{4}{5(x+1)} + \frac{x-4}{5(x^2+x+1)}$ (5) (2)

II. On a: $\cos(n\alpha) = 2\cos\alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha$ d'où la récurrence.

T_n Par récurrence, T_n est bien un polynôme de degré n . (3)

Racines de T_n : $\cos n\alpha = 0 \Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in [0, n-1] \Leftrightarrow \alpha = \frac{(2k+1)\pi}{2n} \quad k \in [0, n-1]$.

On obtient alors n racines distinctes $x_{k2} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. $k \in [0, n-1] \Leftarrow$ (2)

A priori: $f_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x-x_{k2}}$ et $a_k = \frac{1}{T'_n(x_{k2})}$.

Or: $T'_n(x) = n \cdot \frac{\sin(n\alpha \cos x)}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow T'_n(x_{k2}) = \frac{(-1)^k n}{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$

Par conséquent: $\frac{1}{T_n(x)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$ (5)

III 1^{er} cas: $n = 2p$: alors, la fraction rationnelle $g_n = \frac{x^{2p}-1}{(x^2-1)(x^{2p}+1)} = \frac{P(x)}{x^{2p}+1}$ et $g_n = \sum_{j=1}^{2p} \frac{a_j}{x-\alpha_j}$ et $a_j = \frac{P(\alpha_j)}{(2p) \cdot \alpha_j^{2p-1}} = -\frac{P(\alpha_j)\alpha_j}{n}$

Or $P(\alpha_j) = \frac{\alpha_j^{2p}-1}{\alpha_j^2-1} = \frac{-2}{\alpha_j^2-1} \Rightarrow g_n = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{2p} \frac{\alpha_j}{(\alpha_j^2-1)(x-\alpha_j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2p} (A_j + \bar{A}_j)$ où (4)

$A_j = \frac{\alpha_j}{(\alpha_j^2-1)(x-\alpha_j)}$. $A_j + \bar{A}_j = \frac{\alpha_j(\bar{\alpha}_j^2-1)(x-\bar{\alpha}_j) + \bar{\alpha}_j(\alpha_j^2-1)(x-\alpha_j)}{(2-\alpha_j^2-\bar{\alpha}_j^2)(x-\alpha_j)(x-\bar{\alpha}_j)} = \frac{1}{(x-\alpha_j)(x-\bar{\alpha}_j)}$

2^o cas: $n = 2p+1$: dans ce cas, 1 est pôle double de g_n . (6)

Si $\alpha_{2p+1} = 1$, on aura les m^{es} calculs que ci-dessus pour $j \leq 2p$ et donc,

on pourra écrire: $g_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{2p} \frac{1}{(x-\alpha_j)(x-\bar{\alpha}_j)} + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{Q(x)}{(x+1)(x^{2p+1}+1)} = \frac{Q(x)}{R(x)}$

$b = \frac{Q(1)}{\frac{1}{2} R''(1)} = \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{n}$ et $a = 0$ (on multiplie par x et on fait tendre x vers $+\infty$).

* $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes.