

PROBLEME 1:

Soit un système d'équations linéaires défini par: $AX = B$ (1)

où: $A \in M_n(\mathbb{R})$; X et B sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ de composantes: $(x_i), (b_i)$.

I. Transformation du système (1).

On suppose que les éléments diagonaux de A sont non nuls; pour tout $i \in [1, n]$, en divisant la $i^{\text{ème}}$ équation du système (1) par a_{ii} et en la résolvant selon l'inconnue x_i , on transforme (1) en un système équivalent: (2) $X = A^*X + B^*$.

Préciser la valeur de l'élément a_{ij}^* de A^* ainsi que b_i^* de B^* .

II. Condition suffisante pour que les systèmes (1) et (2) aient une solution:

Soit (P) la condition: $\forall i \in [1, n]: |a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

a) Montrer que si (P) est vérifiée, la matrice A est inversible et le système (1) a une solution unique. (Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n)$: $A = M(f)$. En supposant $\text{Ker} f \neq \{0\}$, si $x \in \text{Ker} f$: $x \neq 0$ et en posant $d = \sup |x_i|$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$) montrer que l'on arrive à une contradiction).

b) Montrer que la condition (P) sur A est équivalente à la condition (Q) suivante sur A^* : $\exists C \in]0, 1[: \forall i \in [1, n]: \sum_{j \neq i} |a_{ij}^*| \leq C < 1$.

En déduire que, si (Q) est vérifiée, (2) a une unique solution.

On considère cette condition vérifiée par la suite.

III. Méthode itérative de résolution de (2).

Soit $X^{(0)}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la suite $X^{(q)}$ vérifiant: $X^{(q)} = A^* X^{(q-1)} + B^*$ (3)

On désigne par $x_i^{(q)}$ la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $X^{(q)}$ et on choisit la norme:

$$\|X\| = \sup |x_i| \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que si $Y = A^* Z$ (où Y et Z sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$) alors: $\|Y\| \leq C \|Z\|$. En déduire que, si X désigne l'unique solution de (2) alors: $\forall q \in \mathbb{N}: \|X - X^{(q)}\| \leq C^q \|X - X^{(0)}\|$.

b) En déduire que la suite $(X^{(q)})$ converge vers l'unique solution du système, indépendamment du choix du vecteur $X^{(0)}$.