

I. Exercices sur la convexité :

(Toulouse en Sibérie !)

A. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, convexe, dérivable. On considère 3 suites finies de n éléments dans $\mathbb{R}$: (x_i) , (y_i) , (z_i) décroissantes (i.e. $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$) avec, en plus, la propriété suivante :

$$x_1 \geq y_1, x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq y_1 + y_2 + \dots + y_n \text{ et :}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_n.$$

On veut démontrer la propriété ① : $(x_1 - y_1)f'(z_1) + (x_2 - y_2)f'(z_2) + \dots + (x_n - y_n)f'(z_n) \geq 0$ et en déduire la propriété ② : $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_n)$.

1°) Faire le raisonnement pour $n = 2$

2°) Cas n quelconque : montrer par récurrence sur $k \leq n$ que :

$$(x_1 - y_1)[f'(z_1) - f'(z_k)] + \dots + (x_{k-1} - y_{k-1})[f'(z_{k-1}) - f'(z_k)] \geq 0.$$

En déduire ① puis ②.

B. Soit $\mathcal{P}$ la propriété définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$ par :

$$\forall (u, v) \in]a, b[^2, u < v, \exists ! w \in]u, v[: f(v) - f(u) = (v - u)f'(w)$$

1°) Montrer que : f ^{strictement} convexe et dérivable sur $]a, b[\Rightarrow f$ vérifie $\mathcal{P}$

2°) Soit $L_{u,v}$ le polynôme d'interpolation de f aux points $(u, f(u)), (v, f(v))$.

Pour $x \in]u, v[$, on pose $\varphi_{u,v}(x) = f(x) - L_{u,v}(x)$. Montrer que si f vérifie $\mathcal{P}$ alors, $\forall (u, v) \in]a, b[^2, u < v, \forall x \in]u, v[, \varphi_{u,v}(x) \neq 0$

3°) On suppose que $\varphi_{u,v} < 0$ et que, $\exists v' \in]u, v[/ \varphi_{u,v'} > 0$ *

Soit $v_1 \in]u, v'[$, montrer que $L_{u,v_1}(v') > f(v')$ et $L_{u,v_1}(v) < f(v)$. En déduire que : $\exists v_2 \in]v', v[/ L_{u,v_1}(v_2) = f(v_2)$. Montrer, grâce au 2°

que l'on a une contradiction (prendre φ_{u,v_2})

4°) En déduire que, si f vérifie $\mathcal{P}$, on a la propriété suivante :

$$\forall (u, v) \in]a, b[^2, u < v, \exists \varphi_{u,v} > 0 \text{ (où } \varepsilon = \pm 1 \text{)}$$

Montrer que, si $\varepsilon = -1$, f est convexe ; concave dans le cas contraire

* On rappelle que si $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$, $f > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]a, b[, f(x) > 0$ et $f \neq 0$