

I. Calcul de déterminant : soit $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x^{\frac{1}{2}} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & x^{\frac{1}{2}} & x & 1 \end{vmatrix}$

1°. Calculer D_2 et D_3 .

2°. Simplifier D'_n .

3°. En déduire D_n .

II. Soient f et g 2 fonctions réglées sur $[a, b]$ à valeurs réelles, on pose : $\forall x \in [a, b]$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ et $G(x) = \int_a^x g(t) dt$ ainsi que : $H(x) = \int_a^x (f(t)G(t) + F(t)g(t)) dt - F(x) \cdot G(x)$. On rappelle que F, G et H ne sont pas dérivables (nécessairement).

1°. Avec $A = \|f\|$ et $B = \|g\|$, montrer que

$$\forall (x, h) \in [a, b] \times \mathbb{R}, x+h \in [a, b], |H(x+h) - H(x)| \leq A \cdot B \cdot h^2.$$

2°. En déduire que H est dérivable

3°. Simplifier alors l'expression : $\int_a^b (f(t)G(t) + F(t)g(t)) dt$.

III. Problème : familles orthonormales de polynômes :

A. On pose $E = \mathbb{R}[X]$, soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$, on considère l'application F de E^2 dans $\mathbb{R}$ définie par $F(P, Q) = \int_a^b P(x) \cdot Q(x) f(x) dx$ et on note $E_R = \mathbb{R}_R[X]$.

1°. Montrer que F est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée positive sur E .

2°. a) Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant : ① $\deg P_n = n$ ② P_n unitaire ③ $R \neq R' \Rightarrow F(P_R, P_{R'}) = 0$.
(remarquer que, $P_0, P_1, \dots, P_{R-1}$, étant déterminés, $P_R(x) - x^R \in E_{R-1}$)

b). Si (Q_n) est une suite de polynômes vérifiant ① et ②, montrer alors les équivalences : ③ $\Leftrightarrow$ ④ $\Leftrightarrow$ ⑤

où ④ : $\forall R \in \mathbb{N}^*, \forall A \in E_{R-1}, F(Q_R, A) = 0$.

et ⑤ : $\forall B_R$ vérifiant ① et ②, $F(B_R, B_R)$ est minimum pour $B_R = Q_R$.
(remarquer que $B_R - Q_R \in E_{R-1}$). $R \in \mathbb{N}^*$.

(Montrer : ④ $\Rightarrow$ ③ $\Rightarrow$ ⑤ $\Rightarrow$ ④).