

EXERCICE 1 :

On considère le système suivant :

$$\begin{array}{rclcl} x + (m+1)y & + & & + 2mt & = a \\ mx & + & & + t & = b \\ (2m+1)x & + & y & + (m+1)z & + t = c \\ & & & (m+1)z & + (m+1)t = d \end{array}$$

(a, b, c, d sont des paramètres réels).

1°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice associée n'est pas inversible.

2°) Pour chacune des valeurs de m trouvées, donner le rang de la matrice associée et préciser les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour que le système admette des solutions; déterminer alors toutes ces solutions.

EXERCICE 2 :

Résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + \alpha x_2 + \dots + x_n = \beta \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \dots + \alpha x_n = \beta^{n-1} \end{cases}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2$.

(Calculer le déterminant du système et faire intervenir $\Delta = x_1 + x_2 + \dots + x_n$)

PROBLEME :

Soient a , b et c 3 nombres réels donnés, non tous nuls.

Soient a, b et c 3 nombres réels donnés, non tous nuls.

On pose $d = a^2 + b^2 + c^2$ et on note P la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} -c^2 & bc & -ac \\ bc & -b^2 & ab \\ -ac & ab & -a^2 \end{pmatrix}$$

1°. a) Calculer P^2

1°. a) Calculer P^2

b) Calculer P^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La matrice P est-elle inversible? La matrice $P + d I_3$ est-elle inversible?

c) Comparer P et tP .

2°). On désigne par E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I_3 et P .

a) Quelle est la dimension de E ?

b) Calculer (en fonction de λ , μ et d) le déterminant de la matrice $M = \lambda I + \mu P$. Quels sont les éléments de E inversibles dans E ?