

IV. Application numérique :
 Soit le système (S) :

$$\begin{cases} 7x + y + 2z = 1 \\ x + 8y + 3z = 3 \\ 2x + 4y + 9z = 5 \end{cases}$$

- a) Résoudre ce système : on donnera les 3 nombres x, y, z sous forme de quotient.
 b) Déterminer les matrices A^* , B^* associées au système (S) et le réel c défini en II. b. Donner les relations de récurrence permettant de calculer les composantes x_k, y_k et z_k du vecteur $X^{(k)}$ défini par la relation de récurrence (3) et permettant de résoudre (S); on prendra $X^{(0)} = (1, 1, 1)$. Donner un majorant de $\|X - X^{(8)}\|$ et déterminer les vecteurs $X^{(k)}$, $k \in [1, 8]$ (les résultats seront notés dans un tableau).

PROBLEME 2 :

On pose $E = K_{n+1}[X]$ (espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$ sur K).

1°. Soient $n+1$ éléments 2 à 2 distincts $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ de K , on leur associe les $n+1$ formes linéaires y_k^* , $k \in [0, n]$: $y_k^* : P \mapsto y_k^*(P) = P(\alpha_k)$.
 Montrer que $\{y_k^*, k \in [0, n]\}$ est une base de E^* dual de E . (1)

2°. Pour $j \in [0, n]$, on définit le polynôme L_j par $L_j(\alpha_i) = \delta_{ij}$, $i \in [0, n]$.
 Donner l'expression de L_j ; montrer que $\{L_j, j \in [0, n]\}$ admet pour base duale $\{y_k^*, k \in [0, n]\}$.

3°. Si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on définit : $a_{i,j} = P(\alpha_i + \beta_j)$ où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ sont $2n+2$ éléments de K . On pose aussi : $Q_j(X) = P(X + \beta_j)$.
 Montrer que A est la matrice de $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ sur la base $(L_0, \dots, L_n)$.

4°. On se propose de calculer $\det A$.

a). Soit le déterminant de Vandermonde : $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$
 le calculer.

b). Calculer $\det(1, X, \dots, X^n)$ (déterminant de la famille de vecteurs $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base $(L_k)_{k \in [0, n]}$).