

II. Problème

A. Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{5-4\cos x}}$
On désignera par (G) son graphe.

1°) Étudier le signe de $f(x) - \sin x$, x variant dans $[0, \pi]$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $[0, \pi]$. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

2°) Étudier les variations de f ; tracer (G) .

B. Soit g la fonction définie par $g(x) = \operatorname{Arccos}\left(\frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}\right)$ pour $x \in [0, \pi]$
On désignera par (G') son graphe.

1°) Vérifier que g est bien définie sur $[0, \pi]$. Calculer, en fonction de x , $\cos(g(x))$ et $\sin(g(x))$.

2°) Déterminer la dérivée g' de g sur $]0, \pi[$ ainsi que les limites de $g'(x)$ lorsque x tend vers 0 et π . Tracer (G') en précisant sa concavité.

3°). Soit x un élément de $[0, \pi/3]$

a) Démontrer qu'il existe un unique élément z de $[\pi/3, \pi]$ tel que $f(z) = f(x)$.

b) Déterminer une relation entre $\cos x$ et $\cos z$. Prouver que $z = g(x)$.

c) Donner, en fonction de x seulement, les 4 valeurs : $\cos(x+z)$, $\cos(x-z)$, $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$. Pour les 2 dernières, on peut être amené à étudier les fonctions $x + g(x)$ et $x - g(x)$.

4°) a) Prouver que f admet sur $[0, \pi/3]$ une fonction réciproque notée φ .

b) En utilisant les expressions de $\cos\left(\frac{x+z}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{x-z}{2}\right)$ en fonction de x , déterminer l'expression de la fonction φ .