

3°. On pose $R(X) = (X - x_1)(\dots)(X - x_{p_2})$, $x_1, x_2, \dots, x_{p_2}$ étant les 0 de P_n distincts 2 à 2, réels, strictement compris entre a et b et d'ordre impair (i.e. P_n change de signe pour $x = x_i$). Montrer que $F(P_n, R) \neq 0$; en déduire le degré de R et que P_n a toutes ses racines réelles, distinctes, et comprises strictement entre a et b .

4°. Montrer qu'il existe des réels a_n et b_n tels que :

$$P_n(x) = (x + a_n)P_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x) \quad (6)$$

(On remarquera que $P_n - x P_{n-1}$ peut s'écrire : $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k P_k$ et que, pour $k \in [0, n-3]$, $\alpha_k = 0$). Exprimer a_n et b_n à l'aide d'intégrales.

5°. $a = -b$ et f paire : montrer que $a_n = 0$ et que P_n a la même parité que n .

B. Polynômes de Legendre

On prend ici $F(P, Q) = \int_{-1}^{+1} P(x) \cdot Q(x) dx$ et on pose $L_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$

1°. a). Montrer que la suite (L_n) vérifie ① et ②.

b) à l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$F(L_n, A) = -\frac{n!}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] A'(x) dx \quad (\text{où } A \text{ désigne un polynôme de degré } < n). \text{ En déduire que } (L_n) \text{ vérifie ④. } *$$

2°. On se propose de calculer $I_n = F(L_n, L_n)$; on pose $U_n(x) = (x^2 - 1)^n$.

a) Montrer que $I_n = (-1)^n \left[\frac{n!}{(2n)!} \right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (U_n(x)) \cdot U_n(x) dx$ puis que :

$$b) \text{ On pose } J_n = \int_{-1}^{+1} (1 - x^2)^n dx \quad I_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx.$$

Montrer que : $J_n = \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{n+1} (1-x)^{n-1} dx$ puis que : $J_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{2n} dx$

$$\text{En déduire que } I_n = \frac{(n!)^4}{(2n+1)! \cdot (2n)!} 2^{2n+1}.$$

3°. Dans la relation ⑥ du A 4°, montrer que : $a_n = 0$ et $b_n = -\frac{F(L_{n-1}, L_{n-1})}{F(L_{n-2}, L_{n-2})}$ en déduire la relation existant entre L_n, L_{n-1}, L_{n-2} .

* On fera une récurrence et des intégrations par parties en remarquant que -1 et 1 sont racines de $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n]$ pour $k \geq 1$.