

3°) On désigne par T la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

On désigne par F le sous-espace

vectorel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par les matrices I_3 , P et T .

a) Quelle est la dimension de F ?

b) Calculer T^2 en fonction de I et P . Calculer TP et PT .

c) On pose $M = \lambda I_3 + \mu P + \nu T$ et $M_0 = \lambda_0 I_3 + \mu_0 P + \nu_0 T$.

Calculer $M + M_0$ et $M_0 M$. Montrer que F est un sous-anneau unitaire de $M_3(\mathbb{R})$. Est-il commutatif ?

d) Comparer T et sa transposée ${}^t T$. Calculer ${}^t M$ puis $M {}^t M$.

Montrer que $M {}^t M \in E$. Calculer le déterminant de $M {}^t M$ et en déduire celui de M .

Quels sont les éléments ^{de F} inversibles dans $M_3(\mathbb{R})$?

e) La matrice $M_0 \in F$ étant fixée et la matrice M variant dans F , montrer que l'application $M \mapsto M_0 M$ définit un endomorphisme de F . Calculer la matrice de cet endomorphisme dans la base (I_3, P, T) .

Quelles sont les conditions sur λ_0, μ_0, ν_0 pour qu'il soit inversible ?

Quand il ne l'est plus, donner les dimensions respectives de son image et de son noyau. Quels sont les éléments de F inversibles

dans F ? Exprimer alors cet inverse dans F .
(DEUG A1 Strasbourg).