

Problème 1:

I On a: $x_i = \sum_{j=1}^n -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j + \frac{b_i}{a_{ii}}$ d'où: $\begin{cases} a_{ij}^* = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \\ a_{ii}^* = 0 \end{cases} \times \begin{cases} b_i^* = \frac{b_i}{a_{ii}} \end{cases}$

II. a) Soit $x \in \text{Ker f}$. si $x \neq 0$ alors $\alpha = \sup |x_i| \neq 0$ et $\exists i$. $\alpha = |x_i|$. écrivons la i -ième ligne du système: $a_{i1}x_1 + \dots + a_{ii}x_i + \dots + a_{in}x_n = 0 \Rightarrow a_{ii}x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$
 $\Rightarrow |a_{ii}| \alpha = |a_{ii}| |x_i| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \alpha$ et comme $\alpha \neq 0$
 on a: $|a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (P). $\leftarrow (1)$
 b). Comme $a_{ij}^* = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$ alors: $\sum_{j=1}^n |a_{ij}^*| = \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1$.

On pose $C = \sup_{i=1, \dots, n} \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$ et $C < 1$ (ici, le Sup est atteint) $\leftarrow (3)$
 donc $(P) \Rightarrow (Q)$, la réciproque est immédiate.

On a: $(2) \text{ et } (Q) \Leftrightarrow (1) \text{ et } (P) \Leftrightarrow$ l'unique solution cqd. $\leftarrow (1)$

III. a) $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^* z_j \Rightarrow |y_i| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}^*| |z_j| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}^*| \|z\| \leq C \|z\|$
 donc: $\|Y\| \leq C \|Z\|$. $\leftarrow (3)$

On a: $\begin{cases} X = A^* X + B \\ X^{(k)} = A^* X^{(k-1)} + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X - X^{(k)} = A^* (X - X^{(k-1)}) \\ X^{(k)} - X^{(k-1)} = A^* (X^{(k-1)} - X^{(k-2)}) \end{cases}$
 donc: $\|X - X^{(k)}\| \leq C \|X - X^{(k-1)}\|$

et par récurrence: $\|X - X^{(k)}\| \leq C^k \|X - X^{(0)}\|$ $\leftarrow (3)$

b). En vertu de l'inégalité ci-dessus, on en déduit: $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|X - X^{(k)}\| = 0$
 i.e. la suite $(X^{(k)})$ converge vers X indépendamment du choix de $X^{(0)}$ (au sens de la norme définie ci-dessus). $\leftarrow (2)$

IV. A. N.

a) On trouve: $x = -\frac{8}{393} \approx -0,02036$; $y = \frac{79}{393} \approx 0,20102$ $\leftarrow (1)$
 et $z = \frac{185}{393} \approx 0,47074$.
 b) on trouve $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & -2/4 \\ -1/8 & 0 & -3/8 \\ -2/8 & -4/8 & 0 \end{pmatrix}$ $B^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/8 \\ 5/9 \end{pmatrix}$ $\leftarrow (1)$
 $C = 2/3$ $\leftarrow (2)$

$\begin{cases} x_k = -\frac{1}{4} y_{k-1} - \frac{2}{4} z_{k-1} + \frac{1}{2} \\ y_k = -\frac{1}{8} x_{k-1} - \frac{3}{8} z_{k-1} + \frac{3}{8} \\ z_k = -\frac{2}{8} x_{k-1} - \frac{4}{8} y_{k-1} + \frac{5}{9} \end{cases} \leftarrow (1)$

$\|X - X^{(0)}\| = 1 + \frac{8}{393} \approx 1,0204$
 et $\|X - X^{(8)}\| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^8 \times 1,0204 \leq 0,04$
 et en fait: $\|X - X^{(8)}\| \leq 0,007$ $\leftarrow (2)$

$\leftarrow (3)$

Tableau de valeurs:

k	x_k	y_k	z_k
1	-0,28571	-0,125	-0,1111
2	0,19246	0,45238	0,67400
3	-0,11451	0,09797	0,31173
4	0,03980	0,27242	0,53746
5	-0,04962	0,16848	0,42564
6	0,00282	0,22159	0,49130
7	-0,02929	0,19096	0,45770
8	-0,015195	0,20702	0,47719
...			
20	-0,02036	0,20102	0,47074