

I. A. 1°. $n=2$: $x_2 - y_2 = -(x_1 - y_1) \Rightarrow (x_1 - y_1) f'(y_1) + (x_2 - y_2) f'(y_2) = (x_1 - y_1) f'(y_1) - (x_1 - y_1) f'(y_2) = (x_1 - y_1) [f'(y_1) - f'(y_2)] \geq 0$ car f' est croissante. $f(x_1) - f(y_1) + f(x_2) - f(y_2) \geq (x_1 - y_1) f'(y_1) + (x_2 - y_2) f'(y_2) \geq 0$.
 2°. $n=2$: $(x_1 - y_1) [f'(y_1) - f'(y_2)] \geq 0$. Puis par récurrence:
 H.R.: vrai à l'ordre k .

Ordre $k+1$: on utilise l'inégalité: $(x_k - y_k) \geq -(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2) - \dots - (x_{k-1} - y_{k-1})$
 $\Rightarrow (x_1 - y_1) [f'(y_1) - f'(y_{k+1})] + \dots + (x_k - y_k) [f'(y_k) - f'(y_{k+1})] \geq (x_1 - y_1) [f'(y_1) - f'(y_{k+1}) + f'(y_{k+1}) - f'(y_k)] + \dots + (x_{k-1} - y_{k-1}) [f'(y_{k-1}) - f'(y_k) + f'(y_k) - f'(y_{k+1})] \geq 0$
 (On a utilisé ici, le fait que: $f'(y_k) \geq f'(y_{k+1})$). d'où l'H.R.

On aura donc cette inégalité à l'ordre $n-1$. ($\Rightarrow$ ①).

$f(x_1) - f(y_1) \geq (x_1 - y_1) f'(y_1)$ } $\Delta = f(x_1) - f(y_1) + \dots + f(x_n) - f(y_n) \geq (x_1 - y_1) f'(y_1) + \dots + (x_n - y_n) f'(y_n)$
 $f(x_n) - f(y_n) \geq (x_n - y_n) f'(y_n)$ } $\Rightarrow$
 et en remplaçant $x_n - y_n$ par $-(x_1 - y_1) - \dots - (x_{n-1} - y_{n-1})$ et en utilisant l'inégalité ci-dessus à l'ordre $n-1$, on a $\Delta \geq 0$, i.e. la propriété ②.

B) 1°. Grâce au Th. des A.F., on sait que w existe, l'unicité est assurée car f' est strictement croissante.

2°. $\varphi_{u,v}(u) = \varphi_{u,v}(v) = 0$, $\varphi'_{u,v}(x) = f'(x) - \frac{f(v) - f(u)}{v - u}$. Si $\exists x \in]u, v[$ tel que $\varphi_{u,v}(x) = 0$ alors, le Th. de Rolle appliqué aux intervalles $[u, x]$ et $[x, v]$ nous assure l'existence de w_1 et w_2 tels que $\varphi'_{u,v}(w_1) = \varphi'_{u,v}(w_2) = 0$: ce qui est contraire à la propriété ③ $\Rightarrow \forall x \in]u, v[, \varphi_{u,v}(x) \neq 0$ (donc, garde un signe constant).

3°. On a: $f(v) = L_{u,v}(v) > L_{u,v'}(v)$ et $L_{u,v}(u) = L_{u,v'}(u)$ donc, $\forall x \geq u$, $L_{u,v}(x) > L_{u,v'}(x)$ (ce sont des fonctions affines).

D'où: $L_{u,v}(v) > L_{u,v'}(v) = f(v)$. De même, on aura: $\forall x > u$, $L_{u,v}(x) < L_{u,v'}(x)$ et donc, $L_{u,v}(v) < L_{u,v'}(v) = f(v)$.

Sur $[v, v]$, $\varphi_{u,v}(v) < 0$ et $\varphi_{u,v}(v) > 0 \Rightarrow \exists v_2 / \varphi_{u,v}(v_2) = 0$ i.e. $L_{u,v}(v_2) = f(v_2)$ donc, ici, L_{u,v_2} s'écrit aussi: L_{u,v_2} (car $L_{u,v}$ est aussi le polynôme d'interpolation de f aux points $(u, f(u)), (v_2, f(v_2))$).

Donc, $\varphi_{u,v_2}(x) = \varphi_{u,v}(x)$ et $\varphi_{u,v_2}(v_2) = 0$ où $v_2 \in]u, v_2[$ ce qui est en contradiction avec le 2°.

4°. Montrons que si pour $(\alpha, \beta) \in]a, b]^2$, $\alpha < \beta$, $\varphi_{\alpha, \beta} > 0$ alors, $\forall (u, v) \in]a, b]^2$, $\varphi_{u, v} > 0$ (les inégalités étant vérifiées respectivement sur les intervalles $]a, \alpha[$ et $]u, v[$. Grâce au 3°, on sait que, $\forall \beta' \in]\alpha, \beta[$, $\varphi_{\alpha, \beta'} > 0$; on démontrerait de même, $\varphi_{\alpha', \beta} > 0$. Donc, si $u \in]\alpha, \beta]$, $\varphi_{u, \beta} > 0$ et donc, $\varphi_{u, v} > 0$, de même si $v \in]\alpha, \beta]$. Maintenant, si $u < \alpha < \beta < v$, $\varphi_{u, \alpha} > 0$ ainsi $\varphi_{u, v} > 0$ q.f.d.
 Si $\varepsilon = -1$, $\varphi_{u, v} < 0$ donc, $\forall w \in]u, v[, f(w) < L_{u, v}(w)$ et si on écrit $w = t u + (1-t) v$, $t \in]0, 1[$, on aura bien $f(t u + (1-t) v) < t f(u) + (1-t) f(v)$ q.f.d.