

Corrigé du devoir surveillé.

I. 1°. $D_2 = x^2/2$ et $D_3 = x^3/6$.

2°. On dérive par rapport à chaque colonne, on obtient n déterminants, ils sont tous nuls sauf un :

$$\begin{vmatrix} x^{n/2-1} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 0 \\ x^{n/2} & \dots & x^{n/2} & 1 \end{vmatrix} = D_{n-1} ; \text{ donc } D'_n = D_{n-1}$$

3°. Par une récurrence immédiate,

on trouve $D_n = x^n/n!$ car $D_n(0) = 0$.

II. 1°. Etudions la différence $H(x+h) - H(x) = \Delta(h)$.

$$\Delta(h) = \int_x^{x+h} [f(t)g(t) + g(t)f(t)] dt = [F(x+h)(G(x+h) - G(x)) + G(x)(F(x+h) - F(x))]$$

$$= I_1 + I_2 \text{ où } I_1 = \int_x^{x+h} f(t)[G(t) - G(x)] dt \text{ et } I_2 = \int_x^{x+h} g(t)[F(t) - F(x)] dt$$

$$|G(t) - G(x)| = \left| \int_x^t g(u) du \right| \leq |t-x| \cdot B \Rightarrow |I_1| \leq \int_x^{x+h} A \cdot B \cdot |t-x| dt = AB \frac{h^2}{2}$$

$$|F(t) - F(x+h)| = \left| \int_{x+h}^t f(u) du \right| \leq |t-x-h| \cdot A \Rightarrow |I_2| \leq \int_{x+h}^{x+h} A \cdot B \cdot |t-x-h| dt = AB \frac{h^2}{2}$$

donc $|\Delta(h)| \leq |I_1| + |I_2| \leq AB \cdot h^2$.

2°. H est différentiable et $H' = 0$ (évident!).

3°. $H(a) = 0$ donc $H(b) = 0$ d'où : $\int_a^b (f(t)g(t) + g(t)f(t)) dt = F(b) \cdot G(b)$

III A.

1°. F forme bilinéaire symétrique : évident ; $F(P, P) = \int_a^b P^2(x) f(x) dx \geq 0$.

Montrons que F est définie : i. e. $F(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0$; en effet, la fonction

$P^2(x) \cdot f(x)$ est continue et ≥ 0 donc : $\int_a^b P^2(x) f(x) dx = 0 \Rightarrow \forall x \in [a, b], P(x) = 0$.

P étant un polynôme, comme il admet une infinité de 0 : $P = 0$.

2°. a) On reconnaît ici le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

des polynômes P_n formant une base, donc, on peut écrire :

$P_k(x) - x^k = d_0 P_0 + \dots + d_{k-1} P_{k-1}$; les d_i sont donnés par la condition : $F(P_k, P_i) = 0$.

b). ④ $\Rightarrow$ ③ : évident : $k < l$ $\deg P_k < \deg P_l$ donc $F(P_k, P_l) = 0$ et

par symétrie, si $k > l$: $F(P_k, P_l) = 0$.

③ $\Rightarrow$ ⑤ : $F(B_k, B_k) = F(B_k - Q_k + Q_k, B_k - Q_k + Q_k) = F(B_k - Q_k, B_k - Q_k) + F(Q_k, Q_k)$ ($F(B_k - Q_k, Q_k) = 0$ car $Q_k \perp E_{k-1}$).

donc, $F(B_k, B_k)$ est minimum pour $B_k = Q_k$.

⑤ $\Rightarrow$ ④ : si $\deg A < k$, on pose $B_k = Q_k + \lambda \cdot A$ d'où :

$$F(B_k, B_k) = F(Q_k, Q_k) + 2\lambda F(Q_k, A) + \lambda^2 F(A, A), \quad A \neq 0, \text{ on prend}$$

$$\lambda = - \frac{F(Q_k, A)}{F(A, A)} \Rightarrow F(B_k, B_k) = F(Q_k, Q_k) - \frac{F(Q_k, A)^2}{F(A, A)} \geq F(Q_k, Q_k)$$

$\Rightarrow F(Q_k, A) = 0$ c.q.f.d.