

EXERCICE 1: [17]

1°) Si A est la matrice du système, on trouve $\det A = -n^2(n+1)(n+3)$
 A n'est pas inversiblessi : $n \in \{0, -1, -3\}$ $\leftarrow (1)$

2°) $m = 0$ en écrivant le système : $\begin{cases} x+y = a \\ z+t = b \\ x+y+z+t = c \\ 2z+t = d \end{cases} \Rightarrow \text{rg } A = 2$ $\leftarrow (1)$
 CNS : $b = d, c = a+b$ $\leftarrow (2)$

$m = -1$ le mineur d'ordre 3 extrait en prenant les 3 premières lignes et colonnes est non nul $\Rightarrow \text{rg } A = 3$ $\leftarrow (2)$
 la dernière équation nous donne le CNS : $d = 0$.

$m = -3$ le premier mineur d'ordre 3 extrait est $\neq 0 \Rightarrow \text{rg } A = 3$ $\leftarrow (3)$
 en bordant ce mineur, on trouve le CNS : $6b - 2a - 4c + 7d = 0$

Solutions. (1) : e.a. contenant le point $(a, 0, b, 0)$ // au vecteurs : $(1, -1, 0, 0)$
 $(0, 0, 1, -1)$

(2) : en prenant les 3 premières équations on peut tout exprimer en fonction de t : $x = a + 2t$; $y = c + a + t$; $z = b + a + t$.

(3) on exprime tout en fonction de t d'où :
 $x = -\frac{b}{3} - \frac{d}{6}$; $y = -\frac{b}{6} - \frac{d}{12} - \frac{c}{2} - 3t$; $z = -\frac{d}{2} - t$.

EXERCICE 2: [15]

On calcule le déterminant du système : $\Delta = (d+n-1)(d-1)^{n-1}$ $\leftarrow (1)$

Si $\Delta \neq 0$ on a : $(d+n-1)d = \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}$ et la $k^{\text{ème}}$ équation donne : $(d-1)x_k + d = \beta^{k-1}$
 d'où : $x_k = \frac{(\beta-1)\beta^{k-1}(d+n-1) - (\beta^n + 1)}{(d-1)(\beta-1)(d+n-1)}$ $\leftarrow (2)$

$d = 1$ pour que le système soit possible, il faut et il suffit que $\beta = 1$; dans ce cas, on n'a qu'une seule équation : $s = 1$ hyperplan affine. $\leftarrow (2)$

$d = 1-n$ le rang du système est $n-1$; si on borde le mineur d'ordre $n-1$ obtenu en prenant les $n-1$ premières lignes et colonnes par la ligne $(1, 1, \dots, 1)$ et la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ \vdots \\ \beta^{n-1} \end{pmatrix}$ et que l'on additionne toutes les lignes, on va trouver la CNS pour que le système soit possible : $\beta^n = 1, \beta \neq 1$

On pose : $d' = x_1 + \dots + x_{n-1} \Rightarrow d' = \frac{1}{\beta} - d x_n$ ($n^{\text{ème}}$ équation)
 $(d-1)x_n = \beta^{n-1} - d' - x_n$ ($k^{\text{ème}}$ ") $\Rightarrow x_n = \frac{\beta^n - 1 - (d+1)\beta^n}{(d-1)\beta}$ $\leftarrow (3)$

PROBLEME [18]

1°) a) $P^2 = -dP$ $\leftarrow (3)$

b) $P^n = (-d)^{n-1}P$ ($P^0 = I_3$)

$P^2 + dP = 0 \Leftrightarrow P(P + dI_3) = 0 \Rightarrow P$ et $P + dI_3$ ne sont pas inversibles. $\leftarrow (4)$

c) $P = {}^t P$ (matrice symétrique). $\leftarrow (5)$

2°) I_3 et P sont linéairement indépendants

a) $\dim E = 2$ $\leftarrow (2)$

b). $\det(\lambda I + \mu P) = \lambda^3 - d\lambda^2\mu = \lambda^2(\lambda - d\mu)$

Pour que H soit inversible il faut et il suffit que $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq \mu d$. $\leftarrow (3)$

$H^{-1} = \frac{\lambda}{\lambda^3} I + \frac{\mu}{\lambda^2(\lambda - \mu d)} P$

3°) a) les matrices I_3, P et T sont linéairement indépendantes. $\leftarrow (3)$

$\Rightarrow \dim F = 3$

b) $T^2 = -P - dI_3$ $\leftarrow (4)$

On trouve aussi : $TP = PT = 0$

* Pour montrer (2), on distingue 2 cas : 2 des 3 nombres (a, b, c) sont non nuls $\Rightarrow \lambda \neq 0$
 2 des 3 nombres (a, b, c) sont nuls $\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \mu d = 0 \Rightarrow \mu = 0$