

Problème 2:

1°) Pour montrer que $\{y_{\alpha}^*\}$ est une base, il suffit de montrer que $\{y_{\alpha}^*\}_{\alpha \in E}$ est génératrice. Et donc, il suffit que $\{y_{\alpha}^*\}^\perp = \{0\}$. $\leftarrow (2)$

Or: si $P \in E : \forall \alpha \in [0, n] P(\alpha) = 0$ alors P est un polynôme de degré $\leq n$ qui admet $n+1$ racines : $P = 0$. c.q.f.d. : $\{y_{\alpha}^*\}_{\alpha \in [0, n]}$ base de E . $\leftarrow (2)$

2°) On trouve:
$$L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - \alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i} \leftarrow (3)$$

L_j est bien la base duale de $\{y_{\alpha}^*\}$ car $y_{\alpha}^*(L_j) = \delta_{\alpha j}$. $\leftarrow (3)$

3°) On soit que $Q_j(X) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$, or: $\lambda_i = Q_j(\alpha_i) = P(\alpha_i + \beta_i) = a_{i,j}$ c.q.f.d. $\leftarrow (2)$

4°) a). On a vu en T.P. que:
$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \leftarrow (6)$$

b). On a $\begin{cases} 1 = L_0 + \dots + L_n \\ x = d_0^n L_0 + \dots + d_n^n L_n \end{cases}$ d'où:
$$\det_{(L_n)}(1, x, \dots, x^n) = \begin{vmatrix} 1 & d_0^n & \dots & d_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & d_n^n & \dots & d_n^n \end{vmatrix} = V(d_0, d_1, \dots, d_n) \leftarrow (7)$$

c). On utilise la formule de Taylor:

$$Q_{\alpha}(X) = P(X + \beta_{\alpha}) = P(X) + \beta_{\alpha} P'(X) + \dots + \frac{\beta_{\alpha}^n}{n!} P^{(n)}(X) \leftarrow (2)$$

$$\text{d'où: } \det_{\binom{P^{(k)}}{(P^{(k)})}}(Q_0, \dots, Q_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \beta_0 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\beta_0^n}{n!} & \dots & \frac{\beta_n^n}{n!} \end{vmatrix} = \frac{1}{\prod_{i=0}^n i!} V(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \leftarrow (2)$$

$$d). P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

$$P^{(k)} = k! a_k + \dots + \frac{n!}{(n-k)!} a_n X^{n-k}$$

$$\det_{\binom{P^{(k)}}{(X^k)}}(P, P', \dots, P^{(n)}) = \begin{vmatrix} a_0 & \dots & k! a_k & \dots & n! a_n \\ a_1 & \dots & (k-1)! a_{k-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Pour avoir une matrice diagonale, on permute les colonnes 1 et $n+1$, 2 et n , ..., k et $n-k+1$ d'où:

n impair: $n+1 = 2p$, on ira jusqu'à $k = p \Rightarrow p$ transpositions. signatur de la perm. $\leftarrow$
 n pair: $n+1 = 2p+1$, ..., $k = p$ idem. $\leftarrow$ Non: $(-1)^p$

$$\text{d'où: } \det_{\binom{P^{(k)}}{(X^k)}}(P^{(k)}) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(n!)^{n+1}}{\prod_{i=0}^n i!} a_n^{n+1} \leftarrow (4)$$

$$\text{Conclusion: } \det_{\binom{Q_k}{(L_k)}} A = \det_{\binom{Q_k}{(L_k)}}(Q_k) = \det_{\binom{Q_k}{(L_k)}}(X^k) \times \det_{\binom{P^{(k)}}{(X^k)}}(P^{(k)}) = \det_{\binom{Q_k}{(P^{(k)})}}(Q_k) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{(n!)^{n+1}}{(\prod_{i=0}^n i!)^2} a_n^{n+1} V_1 = V_2 \leftarrow (5)$$

où: $V_1 = V(d_0, \dots, d_n)$ or $V_2 = V(\beta_0, \dots, \beta_n)$.

$$5°) \text{ On a: } a_{i,j} = \sum_{k=0}^n a_k (\alpha_i + \beta_j)^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{h+l=k} C_{h+l}^k \alpha_i^h \beta_j^l \leftarrow (1)$$

$$\text{donc: } a_{i,j} = \sum_{h=0}^n (\alpha_i)^h \gamma_{h,j} \text{ où: } \gamma_{h,j} = \sum_{l=0}^{n-h} C_{h+l}^h a_{h+l} (\beta_j)^l$$

$$\text{On pose: } B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 a_n & d_n^2 & \dots & d_n^n \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} C_0^0 a_0 & \dots & C_n^0 a_n \\ C_0^1 a_0 & \dots & C_n^1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0^n a_0 & \dots & C_n^n a_n \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \beta_0 & \dots & \beta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_0^n & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où: } A = B \cdot C \cdot D \text{ et } \det A = \det B \cdot \det C \cdot \det D \leftarrow (3)$$

$$\text{i.e. } \det A = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=0}^n C_n^i \cdot V_1 \cdot V_2$$