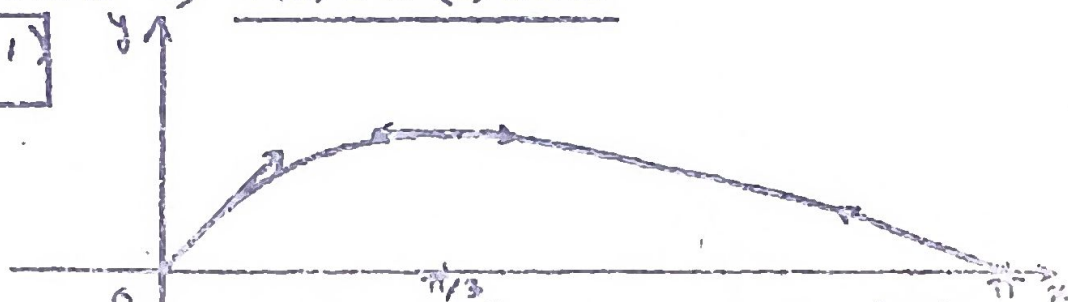


II. A. 1°/ $f(x) - \sin x = f(x) [1 - \sqrt{5-4\cos x}] = f(x) \cdot \frac{-4(1-\cos x)}{\sqrt{5-4\cos x}} \leq 0$ (nul si $f(x) = 0$ ou $\cos x = 1$)
 $f(x) - x = f(x) - \sin x - (x - \sin x) \leq 0$

nul si $f(x) = \sin x$ et $x = \sin x \Rightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$.

2°/ $f'(x) = \frac{2-\cos x}{(5-4\cos x)^{3/2}} (2\cos x - 1)$

x	0	$\pi/3$	π		
$f'(x)$ <td>1</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>$-1/3$</td>	1	+	0	-	$-1/3$
$f(x)$ <td>0</td> <td>$\nearrow 1/2$</td> <td>$\rightarrow 0$</td>	0	$\nearrow 1/2$	$\rightarrow 0$		



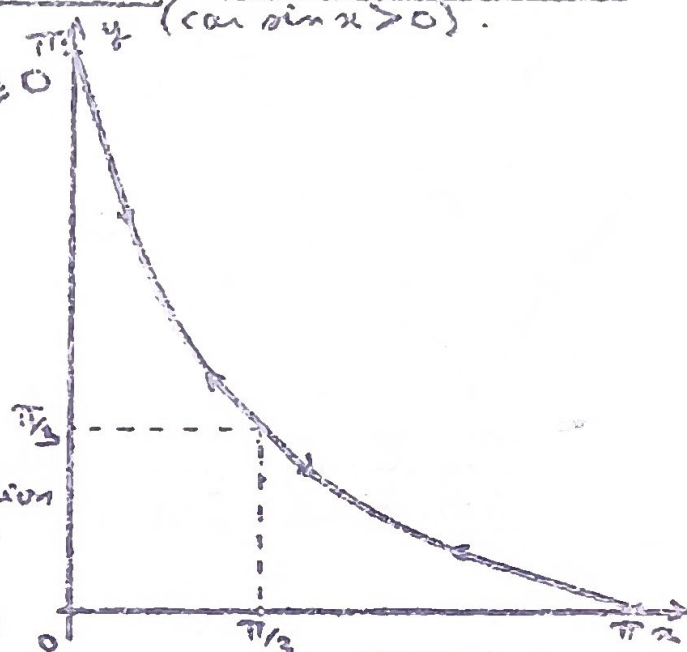
B. 1°/ On a bien: $-1 \leq \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x} \leq 1$; $\cos g(x) = \frac{4-5\cos x}{5-4\cos x}$; $\sin(g(x)) = \frac{3\sin x}{5-4\cos x}$ (car $\sin x > 0$).

2°/ $g'(x) = -\frac{3}{5-4\cos x}$

g est donc strictement concave.

x	0	$\pi/3$	π
$g'(x)$	-3	-1	-1/3
$g(x)$	π	$\searrow \pi/3$	$\rightarrow 0$

$g''(x) = \frac{12\sin x}{(5-4\cos x)^2} \geq 0$



Remarque: $g = g^{-1}$.

3°/ a) Il suffit d'utiliser le tableau de variation de f .

b) On a: $f^2(z) = f^2(x) \Rightarrow$

$\cos^2 z (5-4\cos x) - 4\cos z (1-\cos^2 x) + \cos x (4-5\cos x) = 0$

Or: $\cos z = \cos x$ est une solution évidente (à écarter, si $x \neq z$) $\Rightarrow z = g(x)$.

2) $\cos(x+z) = \frac{-2\cos^2 x + 4\cos x - 3}{5-4\cos x}$ $\cos(x-z) = \frac{-8\cos^2 x + 4\cos x + 3}{5-4\cos x}$

$\cos^2(\frac{x+z}{2}) = \frac{\sin^2 x}{5-4\cos x}$ et $\cos^2(\frac{x-z}{2}) = \frac{4\sin^2 x}{5-4\cos x}$; il faut maintenant étudier

les signes de $\cos(\frac{x+z}{2})$ et $\cos(\frac{x-z}{2})$ pour $x \in [0, \pi/3]$.

Soit $h_1(x) = \frac{x+g(x)}{2}$, $h_1'(x) = \frac{x(1-2\cos x)}{5-4\cos x} \leq 0 \Rightarrow h_1(x) \searrow \pi/2$
 $\Rightarrow \cos \frac{x+z}{2} \geq 0$.

De même, on montre que: $\frac{x-z}{2} \in [-\pi/2, 0] \Rightarrow \cos \frac{x-z}{2} \geq 0$.

D'où: $\cos \frac{x+z}{2} = f(x)$ et $\cos \frac{x-z}{2} = 2f(x)$.

4°/ a) Évident d'après le tableau de variation de f .

b) On a: $\frac{x+z}{2} \in [\pi/3, \pi/2] \Rightarrow \frac{x+z}{2} = \text{Arccos } y$ (où l'on a posé $y = f(x)$)

$\frac{z-x}{2} \in [0, \pi/2] \Rightarrow \frac{z-x}{2} = \text{Arccos}(2y)$ et en faisant la différence

de ces 2 égalités: $x = \text{Arccos}(y) - \text{Arccos}(2y)$

i.e. si $x \in [0, 1/2]$, $\varphi(x) = \text{Arccos } x - \text{Arccos}(2x)$.

Remarque: dans le I B, il est vivement recommandé de faire des dessins pour illustrer géométriquement les propriétés demandées.

* On peut aussi étudier les signes de $\sin(x+g(x))$ et $\sin(g(x)-x)$.