

3°. Le polynôme $P_n \cdot R$ ne change pas de signe sur $[a, b]$ donc, $\int_a^b P_n(x) R(x) dx$ n'est pas nul; ceci prouve que $\deg R \geq n$ or $\deg R \leq n$ donc $\deg R = n$. Comme $P_n = dR$ et que les coeff. de X^n sont égaux, $P_n = R$ et on peut conclure.

4°. On a: $F(P_n - x P_{n-1}, P_n) = -F(x P_{n-1}, P_n) = -F(P_{n-1}, x P_n)$

pour $n \leq n-1$. Si $n \leq n-3$, $\deg(x P_n) < n-1$ donc $F(P_{n-1}, x P_n) = 0$.

Or: si $P_n - x P_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k$, $F(P_n - x P_{n-1}, P_n) = a_n F(P_n, P_n)$.

ce qui prouve que si $n \leq n-3$, $a_n = 0$ et donc que

$$P_n(x) = (x + a_n) P_{n-1}(x) + b_n P_{n-2}(x) \text{ avec: } \boxed{a_n = -\frac{F(P_{n-1}, x P_{n-1})}{F(P_{n-1}, P_{n-1})}, b_n = -\frac{F(P_{n-2}, x P_{n-1})}{F(P_{n-2}, P_{n-1})}}$$

5°. $a = -b$, f paire:

$$a_n F(P_{n-1}, P_{n-1}) = -\int_a^b x \cdot f(x) \cdot P_{n-1}^2(x) dx; \text{ d'autre part, } P_0 = 1, P_1 = x.$$

et si on suppose par récurrence que pour $n \leq n-1$, $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$.

alors $x \cdot f(x) \cdot P_{n-1}^2(x)$ est une fonction impaire, donc son intégrale est nulle.

$$\Rightarrow \underline{a_n = 0} \text{ et } \underline{P_n(-x) = -x \cdot P_{n-1}(-x) + b_n P_{n-2}(-x) = (-1)^n P_n(x)} \text{ qfd.}$$

B

1°. a). Évident.

b). 1 est racine d'ordre n de $(x^2 - 1)^n$ donc, il est racine d'ordre k de $\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n]$.
 $F(L_n, A) = \int_a^b \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] \cdot A(x) dx = \frac{n!}{(2n)!} \int_a^b \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(x^2 - 1)^n] A'(x) dx$ d'où le résultat, la quantité étant nulle.

Par récurrence, on a: $\boxed{F(L_n, A) = (-1)^k \frac{n!}{(2n)!} \int_a^b \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(x^2 - 1)^n] \cdot A^{(k)}(x) dx}$

et pour $k = n$, $F(L_n, A) = 0$ car $A^{(n)} = 0$.

2°. a) Il suffit d'appliquer le résultat ci-dessus à $A = L_n$ et $k = n$.

Puis: $\frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (L_n(x)) = (2n)!$ d'où: $\boxed{I_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_a^b (x^2 - 1)^n dx}$

b). On fait une intégration par parties avec $u' = (1+x)^n$ et $v = (1-x)^n$.

Ensuite, à l'aide d'une récurrence et de n intégrations par parties.

On obtient $I_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_a^b (1+x)^{2n} dx = \frac{(n!)^2}{(2n)! (2n+1)} 2^{2n+1}$

On remarque que $I_n = \frac{n!}{(2n)!} J_n$ d'où le résultat.

3°. ici, $f = 1$ donc, f est paire et le A 5° nous permet d'affirmer que

$\underline{a_n = 0}$. $x L_{n-2} = L_{n-1} + A$ où $\deg A < n-1$ donc, $F(L_{n-1}, x L_{n-2}) =$

$F(L_{n-1}, L_{n-1})$. On en déduit $b_n = -\frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)}$ et par conséquent.

$$\boxed{L_n = x L_{n-1} - \frac{(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)} L_{n-2}}$$

$\rightarrow$ ou bien: $L_{n+1} = x L_n - \frac{n^2}{4n^2 - 1} L_{n-1}$