

$$c) M + M_0 = (\lambda_0 + d_0)I + (\mu_0 + \gamma_0)P + (\nu_0 + \gamma_0)T$$

$$M_0 M = (\lambda_0 \lambda - \gamma_0 \gamma d)I + (\lambda_0 \mu + \gamma_0 \lambda - \mu_0 \gamma d - \gamma_0 \gamma)P + (\lambda_0 \nu + \gamma_0 d)T \quad \leftarrow (3)$$

Les lois sont stables, $I \in F$ donc F est un sous-anneau unitaire de $M_3(\mathbb{R})$.
De plus, la loi $\times$ est commutative. $\leftarrow (2)$

d) Tantymétrique (${}^tT = -T$)

$$H^t H = (\lambda^2 + \gamma^2 d)I + (2\lambda\mu - \mu^2 d + \gamma^2)P \in E.$$

$$\Rightarrow \det H^t H = (\lambda^2 + \gamma^2 d)^2 [\lambda^2 + \gamma^2 d - d(2\lambda\mu - \mu^2 d + \gamma^2)] = [(\lambda^2 + \gamma^2 d)(\lambda - \mu d)]^2 \quad \leftarrow (5)$$

$$\text{Or: } \det H^t H = \det H^2 \Rightarrow \det H = \pm (\lambda^2 + \gamma^2 d)(\lambda - \mu d)$$

en considérant le terme en λ^3 , on trouve: $\det H = (\lambda^2 + \gamma^2 d)(\lambda - \mu d)$.

Pour que H soit inversible dans $M_3(\mathbb{R})$ il faut et il suffit que:

$$\lambda^2 + \gamma^2 d \neq 0 \quad \lambda \neq 0 \text{ ou } \gamma \neq 0$$

$$\text{et } \lambda - \mu d \neq 0 \quad \text{i.e. } \text{et } \lambda \neq \mu d.$$

$$e) \text{ Matrice de } H \mapsto M_0 H \quad A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & -\gamma_0 d \\ \mu_0 & \lambda_0 - \mu_0 d & -\gamma_0 \\ \gamma_0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow (5)$$

Cet endomorphisme est inversible si son déterminant est $\neq 0$

$$\text{i.e. } (\Rightarrow) (\lambda_0 - \mu_0 d)(\lambda_0^2 + \gamma_0^2 d) \neq 0 \quad \leftarrow (2)$$

(On retrouve la condition de d: on pouvait le prévoir car $H \mapsto M_0 H$ est inversible si M_0 est inversible).

Si M_0 n'est pas inversible, on a 3 cas à distinguer:

$$(1) \lambda_0 = \mu_0 = \gamma_0 = 0 \quad \dim \text{Ker } u_0 = 3 \quad \dim \text{Im } u_0 = 0 \quad (u_0: H \mapsto M_0 H)$$

$$(2) \lambda_0 = \mu_0 d, \lambda_0 \neq 0 \quad \text{il faut chercher le rang de la matrice de } u_0$$

on le minimise obtenu en supprimant la 2^e colonne et la 1^{re} ligne est non nul

$$\Rightarrow \dim \text{Ker } u_0 = 1 \quad \dim \text{Im } u_0 = 2. \quad \leftarrow (4)$$

$$(3) \lambda_0 = \gamma_0 = 0, \mu_0 \neq 0 \quad \text{dans ce cas: } \text{rg } u_0 = 1.$$

$$\dim \text{Ker } u_0 = 2 \quad \dim \text{Im } u_0 = 1.$$

$$(4) \lambda_0 = \mu_0 = 0, \gamma_0 \neq 0 \quad \text{dans ce cas: } \text{rg } u_0 = 2.$$

$$\dim \text{Ker } u_0 = 1 \quad \dim \text{Im } u_0 = 2.$$

Si M_0 est inversible alors u_0 est une bijection $\Rightarrow \exists H' \in F: u_0(H') = I$

i.e. $M_0 H' = I$ donc M_0 est inversible dans F .

$$H' = u_0^{-1}(I) \quad \text{calculons la matrice inverse de } u_0: A_0^{-1} = \frac{1}{\det u_0} \begin{pmatrix} \lambda_0(\lambda_0 - \mu_0 d) & 0 & \gamma_0(\lambda_0 - \mu_0 d) \\ -(\mu_0 \lambda_0 + \gamma_0^2) & \lambda_0^2 + \gamma_0^2 d & \lambda_0 \gamma_0 - \mu_0 \gamma_0 d \\ -(\lambda_0 - \mu_0 d) \gamma_0 & 0 & \lambda_0(\lambda_0 - \mu_0 d) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow H' = \frac{1}{(\lambda_0 - \mu_0 d)(\lambda_0^2 + \gamma_0^2 d)} (\lambda_0(\lambda_0 - \mu_0 d)I - (\mu_0 \lambda_0 + \gamma_0^2)P - (\lambda_0 - \mu_0 d)\gamma_0 T)$$

$\leftarrow (6)$