

I. Problème: déterminant de Gram

Soit $\varphi \in \mathcal{B}_2(E; \mathbb{R})$ une forme bilinéaire, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in E^m$.

On note: $\text{Gram}_\varphi(x) = \det(\varphi(x_i, x_j))_{(i,j) \in [1,m]^2}$

1°) Montrer que, si $x_A = \sum_{j \neq A} \lambda_j x_j$ alors $\text{Gram}_\varphi(x) = 0$.

2°) Soit $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E (ici, $m = n$). On note $\det_e(x) = \det(e_i)(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

a) $n = 2$: montrer que $\text{Gram}_\varphi(x) = (\det_e(x))^2 \cdot \text{Gram}_\varphi(e)$.

b) Etudier le cas n quelconque (réurrence inutile!).

c) Si $u \in \mathcal{B}_\mathbb{R}(E)$, montrer que $\text{Gram}_\varphi(u(x)) = (\det u)^2 \cdot \text{Gram}_\varphi(x)$.

3°) Par la suite, φ est le produit scalaire défini sur E e.v. euclidien; on note $\text{Gram}(x)$ le déterminant $\text{Gram}_\varphi(x)$.

a) Montrer que: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ liée $\Leftrightarrow \text{Gram}(x) = 0$, et que, si x est libre alors $\text{Gram}(x) > 0$.

b) Soit $(e_1, e_2, \dots, e_m) = e$ une famille libre de E , $F = \text{Vect}(e)$. On note p_F la projection orthogonale sur F . Si $a \in E$, on pose $a' = a - p_F(a)$. Montrer que $\text{Gram}(a, e) = \text{Gram}(a', e)$. En déduire la formule: $d(a, F) = \sqrt{\frac{\text{Gram}(a, e)}{\text{Gram}(e)}}$.

4°) Quelques applications:

a) La base (e_1, e_2, e_3) étant orthonormale, on désigne par p_i la projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_i, e_k)$ où $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Pour tout (x, y) de E^2 , montrer: $\|x \wedge y\|^2 = \sum_{i=1}^3 \text{Gram}(p_i(x), p_i(y))$ (On pourra écrire $\text{Gram}(p_i(x), p_i(y))$ sous forme d'un carré).

b) Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E , soit $F = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_m)$ $m \leq n$. On pose $u = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n e_i$. Calculer la distance de u à F puis l'angle de u et de F .