

I. EXERCICES:

Convergence (et éventuellement calcul) de:

a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$

b) $J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

II. PROBLEME

On admettra les 2 résultats suivants :

- i) si g est de classe C^0 sur $[a, b]$ et f de classe C^1 sur $[a, b]$; f' de signe constant.
 $\exists d \in [a, b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_a^d g(x)dx + f(a) \int_d^b g(x)dx$
- ii) si $a > 0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sum_{k=0}^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 a^2 + 4k^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{1}{a}.$

Préliminaires

1°) Soit: $f: x \in [0, \pi/2] \mapsto f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$; étudier f et préciser la position du graphique de f par rapport à la droite $y=x$. En déduire que :

$\varphi: x \in]0, \pi/2[\mapsto \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ est décroissante.

2°) Soit f de classe C^0 sur $[0, +\infty[$ telle que: $\forall t \in \mathbb{R}_+ : |f(t)| \leq \frac{1}{t}$. On suppose que, si $a > 0$ et $b > 0$, la suite $(s_n): s_n = \int_0^{a+bn} f(t)dt$ est convergente.

Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et que: $\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$

(On pourra étudier $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ sur $[a+bn, a+b(n+1)]$).

Dans les 2 premières parties du problème, on va calculer: $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt (x > 0)$.

Première partie

existence et calcul de $F(0)$.

1°) si $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin t} dt$. Montrer que I_n est indépendant de n et calculer sa valeur.

2°) Montrer que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) \sin[2(n+1)t] dt = 0$

3°) En déduire que $F(0)$ existe et que $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

Deuxième partie

existence et calcul de $F(x)$.

1°) Montrer que $F(x)$ existe quel que soit x élément de $\mathbb{R}^+$.

2°) $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer les intégrales: $J_{a,b} = \int_0^{\pi/2} e^{-bt} \cos at dt$.