

II. Exercice 1 :

Soit E un e.v. euclidien, $(x_1, x_2, \dots, x_R)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_R)$ deux familles de R vecteurs de E telles que : $\forall (i, j) \in [1, R]^2$, on ait : $x_i \cdot x_j = y_i \cdot y_j$.

1°) Montrer que, si $\text{rg}(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}) = \text{rg}(x_1, \dots, x_i)$ alors, $\exists (\lambda_j)_{j \leq i}$:

$$x_{i+1} = \sum_{j=1}^i \lambda_j x_j.$$

2°) Montrer que : $\forall r < R$: $\|y_{r+1} - \sum_{s=1}^r \mu_s y_s\|^2 = \|x_{r+1} - \sum_{s=1}^r \mu_s x_s\|^2$. (1)

3°) Montrer par récurrence sur i que : $\text{rg}(x_1, \dots, x_i) = \text{rg}(y_1, \dots, y_i)$.

4°) On veut montrer maintenant qu'il existe une isométrie f de E sur E telle que : $\forall i \in [1, R]$, $f(x_i) = y_i$. (2)

a) 1^{er} cas : $(x_1, x_2, \dots, x_R)$ libre, on pose $F = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_R)$ et $G = \text{Vect}(y_1, y_2, \dots, y_R)$. Définir clairement une isométrie f de E sur E vérifiant (2) (Ecrire : $E = F \oplus F^\perp$).

b) 2^{ème} cas : $(x_1, x_2, \dots, x_R)$ liée : après renumérotation, on suppose que $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_R)$ admet $(x_1, x_2, \dots, x_i)$ comme base. Construire de la même façon qu'au a) une isométrie f (utiliser la (1)).

III. Exercice 2 :

Factoriser le déterminant : $\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$

Les racines de $\Delta(x)$ sont toutes simples et multiples (!)

Il est recommandé de faire apparaître un maximum de 0, de les aligner ... Bien préciser les opérations sur les lignes et les colonnes.