

3°) $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose: $K_n(x) = \int_0^{\pi/2} e^{-(2n+1)xt} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt$
 Calculer $K_n(x)$ en mettant $\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$ sous forme d'une somme de cosinus

4°) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n(x)$ existe pour tout x positif et déterminer cette limite.
 (écrire: $K_n(x) = A_n(x) e^{-(2n+1)x\pi/2} + B_n(x)$ où A_n et B_n sont des fractions rationnelles)

5°) Montrer que: $\forall x > 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) e^{-(2n+1)xt} \sin[(2n+1)t] dt = 0$

6°) En déduire $F(x)$ pour $x > 0$. F est-elle continue à droite en 0?

7°) a) si $K \in \mathbb{R}$, calculer: $F_K(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(kt)}{t} dt$ ($x \geq 0$), en déduire l'existence et la valeur, pour $x \geq 0$ de $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^3 t}{t} dt$

b) Généraliser le résultat précédent en calculant pour $x \geq 0$ et pour tout entier $p > 0$, l'intégrale: $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^{2p+1} t}{t} dt$.

Troisième partie

Ici, g est une fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ telle que:

a) $g(t) \sim t$; b) $\int_0^x g(t) dt$ bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1°) Montrer que: $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt$ est convergente (faire une intégration par partie sur des intervalles convenables).

2°) En étudiant: $\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t} \right) g(nt) dt$ quand $n \rightarrow +\infty$, montrer que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{g(nt)}{\sin t} dt.$$

3°) Déduire de ce qui précède:

i). $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin nt}{\sin t} dt$

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{t dt}{(1+n^3 t^3) \sin t}$

(ENSET B' 83).