

Corrigé du devoir.

III. 1°) $x_{i+1} \in \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i)$ car $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_i) = \text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1})$ d'où le résultat.

2°) $\|y_{i+1} - \sum_{j=1}^i \mu_j y_j\|^2 = y_{i+1}^2 + \sum_{j=1}^i \mu_j^2 y_j^2 - 2 \sum_{j=1}^i \mu_j y_{j+1} + 2 \sum_{j=1}^i \mu_j y_j y_{i+1}$ et comme on peut remplacer les y par les x dans les produits scalaires,

$$\text{on a : } \|y_{i+1} - \sum_{j=1}^i \mu_j y_j\|^2 = \|x_{i+1} - \sum_{j=1}^i \mu_j x_j\|^2$$

3°) On a évidemment : $\text{rg}(x_i) = \text{rg}(y_i)$.

H.R. : on a à l'ordre i ; ordre $i+1$; on distingue 2 cas :

1^{er} cas : $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) = \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_i) \Rightarrow x_{i+1} = \sum_{j=1}^i \lambda_j x_j$.

$$\Rightarrow \|x_{i+1} - \sum_{j=1}^i \lambda_j x_j\|^2 = \|y_{i+1} - \sum_{j=1}^i \lambda_j y_j\|^2 = 0 \Rightarrow y_{i+1} = \sum_{j=1}^i \lambda_j y_j$$

donc $\text{rg}(y_1, y_2, \dots, y_{i+1}) = \text{rg}(y_1, y_2, \dots, y_i) = \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1})$ d'après l'H.R.

2^{ème} cas : $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) = \text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_i) + 1$; on ne peut avoir

$\text{rg}(y_1, y_2, \dots, y_{i+1}) = \text{rg}(y_1, y_2, \dots, y_i)$ car cela serait en contradiction avec

l'hypothèse. Là aussi, on a bien $\text{rg}(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}) = \text{rg}(y_1, y_2, \dots, y_{i+1})$.

4°). a) On a : $E = F \oplus F^\perp = G \oplus G^\perp$. Soit $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une b.o.n. de $F^\perp$ et $(\varepsilon_{k+1}, \dots, \varepsilon_n)$ une b.o.n. de $G^\perp$. On définit f par :

$$\forall i \leq k : f(x_i) = y_i \text{ et } \forall i \geq k+1, f(e_i) = \varepsilon_i$$

f est bien une isométrie car on a : $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ où u et v sont les vecteurs de la base définie par : $(x_1, \dots, x_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$.

b) On fait de même mais ici, il faut vérifier que pour $j \in [i+1, k]$ $f(x_j) = y_j$. Or : $\forall j \in [i+1, k]$, on peut écrire :

$$x_j = \sum_{a=1}^i a_{aj} x_a \Rightarrow \|x_j - \sum_{a=1}^i a_{aj} x_a\|^2 = \|y_j - \sum_{a=1}^i a_{aj} y_a\|^2 = 0 \text{ i.e.}$$

$$\boxed{f(x_j) = \sum_{a=1}^i a_{aj} y_a = y_j} \text{ c.q.f.d.}$$

III. On fait : $e'_3 = e_3 - e_1$, $e'_4 = e_4 - e_2$ puis on développe par rapport à la première colonne $\Rightarrow \Delta = x^2(x^2-1)^4$. (!)

I. 1°) On a $\varphi(x_i, x_k) = \sum_{j \neq k} \lambda_j \varphi(x_i, x_j) \Rightarrow$ la $k^{\text{ème}}$ colonne est combinaison linéaire des autres, donc le déterminant est nul.

2°). a) $n=2$: on pose : $x_1 = x_{11}e_1 + x_{21}e_2$, $x_2 = x_{12}e_1 + x_{22}e_2$ et, après un calcul (...) on trouve bien le résultat annoncé.

b). Cas général : on pose : $x_i = \sum_{a=1}^n x_{ai} e_a$ d'où :

$$\varphi(x_i, x_j) = \varphi\left(\sum_{a=1}^n x_{ai} e_a, \sum_{a=1}^n x_{aj} e_a\right) = \sum_{a=1}^n x_{ai} \left(\sum_{b=1}^n \varphi(e_a, e_b) x_{bj}\right)$$

||
y_{ab}

y_{ab} est la terme général de la matrice : HX où X désigne la matrice des vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.