

Corrigé du DS.

I. 1°/ On peut poser $x = 2 + \cos 2t$ ($\Rightarrow t = \text{Arccos} \sqrt{\frac{3-x}{2}}$ ou $t = \sqrt{\frac{3-x}{2}}$ et intégrer par parties. On trouve : $(x-2) \text{Arccos} \frac{x-1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{-x^2 + 4x - 3} + C = (x-2) \text{Arccos} \sqrt{\frac{3-x}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1-(x-2)^2} + C$
 $= \frac{x-2}{2} \text{Arccos}(x-2) - \frac{1}{2} \sqrt{(3-x)(x-1)} + C$ etc...

2°. $F'(x) = \sqrt{1+x^2} (e^x + e^{-x}) = 2 \cosh x \cdot \sqrt{1+x^2}$.

II. 1°. a) $f_1(x) = \int_0^x \frac{t^2-1}{t^2+1} dt = \int_0^x \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right) dt = \boxed{x - 2 \text{Arctg } x}$ fonction impaire

b) $f_1'(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

x	0	1	$+\infty$
f_1'	-	0	+
f_1	0	$\searrow$	$\nearrow +\infty$

$1 - \pi/2$

Asymptote $y = x - \pi$ et

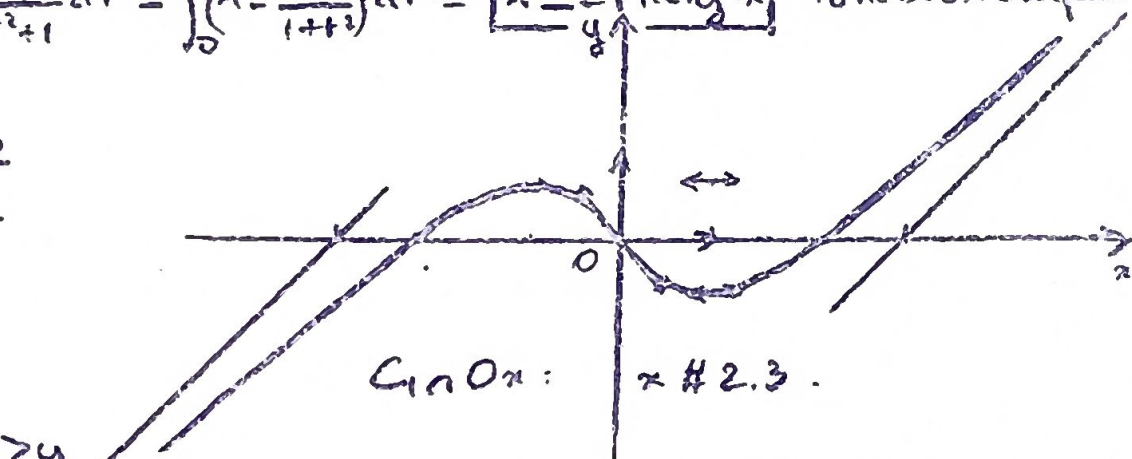
comme $\pi/2 > \text{Arctg } x \Rightarrow f_1(x) > y$

2°. a) $f_{3/2}(x) = \int_0^x \frac{t^2-1}{(t^2+1)^{3/2}} dt = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - 2 \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \boxed{\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}}$ fonction impaire

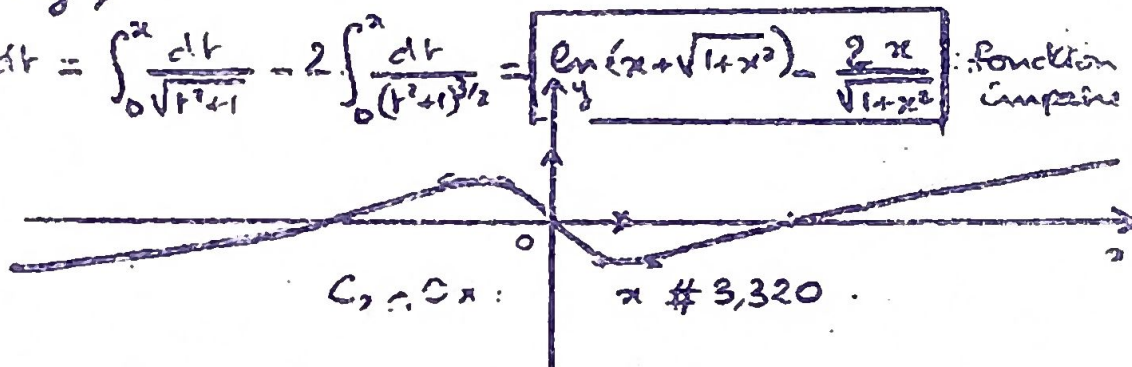
b) $f_{3/2}'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^{3/2}}$

x	0	1	$+\infty$
$f_{3/2}'$	-	0	+
$f_{3/2}$	0	$\searrow$	$\nearrow +\infty$

$\ln(\sqrt{5}) - \sqrt{2}$



$C_1 \cap O x : x \neq 2, 3$



$C_2 \cap O x : x \neq 3, 320$

$f_{3/2}(x) - \ln x = \ln \frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} = \ln 2 + \ln \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right) - \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow \boxed{\ln 2 - 2 = a}$

$f_{3/2}(x) - \ln x - a = \ln \left(1 + \frac{1}{2}(u-1) \right) - \frac{2}{u} + 2$ où $u = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(1/x^2)$.

$\sim \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{5}{4x^2}$

Remarque : $f_{3/2}''(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} (5-x^2)$: 2 points d'inflexion d'abscisse $\pm \sqrt{5}$.

III.

1°. a) $1 + \cosh x = 2 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$; $e^x \sinh \lambda x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) \left(\lambda x + \frac{\lambda^3 x^3}{6}\right) + o(x^3)$

d'où, après une division :

$= \lambda x + \lambda x^2 + \frac{\lambda x^3}{6} (3 + \lambda^2) + o(x^3)$

$\boxed{f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} x + \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\lambda}{24} x^3 (3 + 2\lambda^2) + o(x^3)}$

$f_\lambda(x) - \frac{\lambda}{2} x \sim \frac{\lambda}{2} x^2$ donc, au voisinage de 0, la courbe est toujours au-dessus de la tangente.

Soit $\mathcal{S}_\lambda$ la parabole d'équation : $y_\lambda = \frac{\lambda}{2} x + \frac{\lambda}{2} x^2$ alors $f_\lambda(x) - y_\lambda \sim \frac{\lambda}{24} (3 + 2\lambda^2) x^3$

donc, au voisinage de 0, $f_\lambda(x) - y_\lambda$ est du signe de x et donc, $\mathcal{S}_\lambda$ "traverse"

C_λ ; d'autre part $\mathcal{S}_\lambda$ et f_λ ont la même tangente en 0.

b). B. I. : $x \rightarrow +\infty : \sinh(\lambda x) \sim \frac{1}{2} e^{\lambda x}$, $\cosh x \sim \frac{1}{2} e^x \Rightarrow \boxed{f_\lambda(x) \sim \frac{1}{2} e^{\lambda x}}$

donc, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = +\infty$ et on a une branche parabolique d'axe Oy .