

I.

a) On pose $x = 2 \ln t$ (la convergence en $+\infty$ et en $-\infty$ est évidente car $\ln t \sim \frac{1}{t}$)
 $\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+4 \ln^2 t}$ puis, $u = \ln t$, $\frac{1}{t} = \frac{1}{2} \frac{du}{u}$ $\Rightarrow I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+4u^2} = \frac{1}{2} \left[\text{Arctg}(2u) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ $\textcircled{1}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \Rightarrow$ convergence. Pour le calcul, on pose $u = \frac{x^2}{2}$
 $\Rightarrow I_n = \int_0^{+\infty} 2^n u^n e^{-u} du$ et par récurrence: $I_n = 2^n n!$ $\textcircled{2}$

II. i) si on pose: $u_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{(2n+1)^2 + k^2} = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{2n+1}\right)^2} \sim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$
 avec $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $x = \frac{2k}{2n+1}$
 On reconnaît une somme de Riemann $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \left[\frac{1}{2} \text{Arctg} \frac{1}{x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ $\textcircled{4}$

Preliminaires:

1° f est définie sur $[0, \pi/2]$, $f'(x) = \frac{1+\cos^2 x}{2 \sin^2 x} > 0 \Rightarrow$  $\textcircled{2}$

Signe de $f(x) - x = g(x)$.

$g'(x) = f'(x) - 1 \geq \frac{1+\cos^2 x}{2 \sin^2 x} - 1 = \frac{(1-\cos x)^2}{2 \sin^2 x} \geq 0$ ($(\cos x)^2 \leq \cos x \Rightarrow \frac{1}{(\cos x)^2} \geq \frac{1}{\cos x}$) $\textcircled{1}$

Comme $g(0) = 0 \Rightarrow \forall x > 0: g(x) > 0$ i.e.: $f(x) > x$ $\textcircled{2}$

On peut prolonger f en 0 par $f(0) = 0$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$, Or: $\frac{\cos x}{\sin^2 x} > x \Rightarrow f'(x) < 0$

2° Soit $\varepsilon > 0$ on 2...: $\pi/2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ alors,

$\forall \varepsilon_1 \exists N_1 \forall n \geq N_1, |a_n - \pi/2| < \varepsilon/2$

D'autre part, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{a+b \ln n}{a+b n} \right) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon_2 \exists N_2 \forall n \geq N_2, \ln \left(\frac{a+b \ln n}{a+b n} \right) < \varepsilon_2$

On prend alors $N = \sup(N_1, N_2)$, et si $n \geq N$, on va majorer la différence.

$F(x) - a$: posons $n = E(x)$: $|F(x) - a| \leq |F(x) - a_n| + |a_n - a|$

$F(x) - a_n = \int_{a+b n}^x f(t) dt \Rightarrow |F(x) - a_n| \leq \int_{a+b n}^x |f(t)| dt \leq \ln \left(\frac{x}{a+b n} \right) \leq \ln \left(\frac{a+b \ln n}{a+b n} \right) < \varepsilon_2$
 ($x < a+b \ln n$)

Donc $|F(x) - a| < \varepsilon$ et on peut conclure $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = a$ $\textcircled{3}$

Deuxième partie:

1° $\frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} = \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1} \pm 2 \cos(2nt) \Rightarrow I_n \pm I_{n-1} = I_0 = \pi/2$ $\textcircled{1}$

2° On utilise le lien entre I_n et I_{n-1} avec $f(t) = \varphi(t)$ du 1° du préliminaire

$f(0) = \varphi(0) = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{2n+1} \right) \sin(2n+1)t dt = \left(\frac{2}{\pi} - 1 \right) \int_0^{\pi/2} \sin(2n+1)t dt + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2n+1} \right) \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt$

$\Rightarrow I_n \leq \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{1}{2n+1} \left(\cos(2n+1)\pi/2 - \cos(2n+1)0 \right) + \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \frac{2}{2n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ $\textcircled{2}$

3° $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ $\Rightarrow$

Soit $K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$ et grâce au 1° du préliminaire

$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = F(0)$ Or $I_n = K_n - I_{n-1} = K_n - \pi/2$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0 \Rightarrow F(0) = \pi/2$ $\textcircled{3}$

Troisième partie:

1° Soit $f(x) = e^{-x^2} \frac{\sin x}{x}$ alors, $x \rightarrow \infty: |f(x)| \leq e^{-x^2} \rightarrow 0$ donc

la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a le premier résultat. $\textcircled{1}$