

Donc $\{p(x_i, x_j)\}$ est le terme général de la matrice tXMX

$$\Rightarrow \boxed{\text{Gram}_p(x) = \det_e(x)^2 \cdot \text{Gram}_p(e)}$$

c) Si la famille x est liée, $\text{Gram}_p(x) = 0$ grâce au 1°; $u(x) = (u(x_1), \dots, u(x_m))$ est elle aussi liée $\Rightarrow \text{Gram}_p(u(x)) = 0$, la relation est vérifiée.

Si x est libre, c'est une base, si on pose $y = u(x)$.

~~Alors~~ (b) $\Rightarrow \underline{\text{Gram}_p(y) = \det_x(y)^2 \cdot \text{Gram}_p(x)}$: c'est le résultat demandé.

3°. a) $\Rightarrow$ déjà démontrée au 1°.

$\Rightarrow$ On utilise le 2°. a) en prenant pour e une base orthonormale.

de $\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_m) \Rightarrow \text{Gram}(x) = \det_e(x)^2 \cdot \text{Gram}(e)$. Or $\text{Gram}(e)$ est égal à 1 (determinant de I_m) (On a supposé ici $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ libre). Donc on a démontré la conclusion ainsi que la 2ème propriété.

$$b) \text{ On a : } a' \cdot e_i = 0 \quad \forall i \in [1, m] \Rightarrow \text{Gram}(a', e) = \begin{vmatrix} a'^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_1^2 & e_1 \cdot e_2 & \dots & e_1 \cdot e_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & e_2 \cdot e_m & e_2 \cdot e_m & \dots & e_m^2 \end{vmatrix}$$

D'autre part, comme $p_F(a) \in F$,

$$\text{Gram}(p_F(a), e) = 0 \quad (\text{cf. 3°. a}).$$

$$\text{Donc, } \text{Gram}(a, e) = \text{Gram}(a', e) + \text{Gram}(p_F(a), e) = \text{Gram}(a', e).$$

Compte tenu de l'écriture ci-dessus, il est évident que:

$$\text{Gram}(a', e) = a'^2 \cdot \text{Gram}(e) \text{ et comme } d(a, F)^2 = a'^2 = \frac{\text{Gram}(a, e)}{\text{Gram}(e)}$$

on a bien la formule demandée.

* Dém. fautive ! Si $a \in F$, c'est évident; sinon, on considère

$F' = \text{Vect}(a, e) = \text{Vect}(a', e)$ et on définit $u \in \mathcal{L}(F', F)$ par: $u(a) = a'$, $u(e_i) = e_i$

$$\Rightarrow \text{Gram}(a', e) = \text{Gram}(u(a', e)) = (\det u)^2 \cdot \text{Gram}(a, e).$$

$$\text{Or : } a' = u(a) = a - \sum_{i=1}^m \lambda_i e_i \Rightarrow M_u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\lambda_1 & 1 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 \\ -\lambda_m & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det u = 1 \text{ c.f.d.}$$

$$4°. a). \text{ Grâce au 2° a) on a : } \boxed{\text{Gram}(p_F(x), p_F(y)) = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2}$$

Connaissant les coordonnées du produit vectoriel $x \wedge y$ dans la b.c.n

(e_1, e_2, e_3) , on a bien le résultat.

$$b) \text{ On a : } \text{Gram}(u, e_1, \dots, e_m) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{m+1}$$

En développant par rapport à la

$$\text{dernière ligne, on trouve : } \Delta_{m+1} = \Delta_m - \frac{1}{n} \Rightarrow \Delta_{m+1} = \frac{n-m}{n}$$

$$\text{i.e. } \boxed{d(u, F) = \sqrt{\frac{n-m}{n}}}$$



$$\vec{u} - p_F(\vec{u})$$

$$\|\vec{u}\| = 1, \|\vec{u} - p_F(\vec{u})\| = \sqrt{\frac{n-m}{n}} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{n-m}{n}}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{m}{n}} \Rightarrow \boxed{\theta = \arccos \sqrt{\frac{m}{n}}}$$