

$$2^o) \text{ On a } \int_0^{+\infty} \cos t dt = \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} [e^{it} + e^{-it}] dt = \frac{1}{i} \left[\int_0^{+\infty} e^{it} dt + \int_0^{+\infty} e^{-it} dt \right] \quad (1)$$

3^o) Si on se réfère à 2^o de la 1^re partie.

$$\sin(2n+1)t = 2 \cos(2nt) \sin t + \dots + 2 \cos(2t) \sin t + \sin t \quad (2)$$

Posez $J_n = \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \cos(2nt) dt$ et $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} dt$. (3)

alors $K_n(x) = \sum_{k=0}^n J_k$. Pour calculer J_n , on utilise la 2^ave avec $b = (2n+1)x$ et on a d'où :

$$J_n = -2 \frac{e^{-(2n+1)x} \frac{\pi}{2}}{(2n+1)^2 x^2} (-1)^n (2n+1)x + 2 \frac{(2n+1)}{(2n+1)^2 x} \quad J_0 = \frac{1}{2n+1} (1 - e^{-(2n+1)x})$$

4^o) Compte tenu des résultats ci-dessus; on trouve

$$A_n(x) = 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k (2n+1)x}{(2k+1)^2 x^2} - \frac{1}{(2n+1)x} \quad \text{et} \quad B_n(x) = 2x \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{(2k+1)^2 x^2} + \frac{1}{(2n+1)x} \quad (2) \rightarrow$$

(Revenons $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x)$: compte tenu des 1^re du début du problème, on peut affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x) = x \left(\frac{1}{x} \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \quad (3)$$

D'autre part, comme $x > 0$, $|A_n(x)| \leq B_n(x)$ et $B_n(x)$ est une quantité bornée

(x fixé, n décrivant $\mathbb{N}$) car $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x)$ existe, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(x) e^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} = 0$

d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \quad (3) \rightarrow$

5^o) C'est la même démonstration qu'au 2^o de la 1^re partie.

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t} \right) e^{-(2n+1)t} \sin(2n+1)t dt = \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \sin(2n+1)t dt \quad (4)$$

$$\text{Or } \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t} \sin(2n+1)t dt = \left[\frac{-e^{-(2n+1)t}}{(2n+1)(1+\pi^2)} (\cos(2n+1)t + \pi \sin(2n+1)t) \right]_0^{+\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ à cause de } \frac{1}{2n+1}$$

6^o) De la même façon qu'au 3^o de la 1^re partie, on trouve $F(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \quad (4)$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{\pi}{2}$. La F est continue à droite en 0.

7^o) a) On fait le changement de variable $u = Kt$ et $K > 0$ on a $F(x) = F\left(\frac{x}{K}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-\frac{x}{K}t} \sin t dt$

$$\text{et } K < 0, \text{ comme } F(x) = F\left(\frac{x}{K}\right) = \operatorname{Arctg} \frac{K}{x} = \operatorname{Arctg} \frac{1}{\frac{x}{K}} \quad (K < 0, F(x) < 0) \quad (5)$$

$$\text{b) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-t} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (6)$$

$$\text{c) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (7)$$

$$\text{d) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (8)$$

$$\text{e) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (9)$$

$$\text{f) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (10)$$

$$\text{g) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (11)$$

$$\text{h) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (12)$$

$$\text{i) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (13)$$

$$\text{j) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (14)$$

$$\text{k) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (15)$$

$$\text{l) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (16)$$

$$\text{m) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (17)$$

$$\text{n) } \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{-xt} \sin t dt = \frac{1}{x} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{x} \right) \quad (18)$$