

Problème 1 : Convergence d'intégrales.

$f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ on pose $F(t) = \int_0^t f(u) du$ et on définit 3 sortes de convergences :

- i). $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t)$ existe, on note $I(f)$ cette limite (convergence usuelle).
- ii) $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ existe pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$ existe, on dit que l'intégrale de f est A-convergente et on pose : $A(f) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x)$.
- iii) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du$ existe, on dit que l'intégrale de f est C-convergente et on pose : $C(f) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du$.

I. Etude d'exemples.

1°. a) Calculer $\int_0^T e^{-xt} f(t) dt$ dans les 2 cas suivants : $f(t) = \cos t$, $f(t) = \sin t$.

b) Etudier, pour f, f_2, f_3 l'existence et le cas échéant la valeur de $I(f), A(f), C(f)$ où : $f_1(t) = \sin t$, $f_2(t) = e^{-t} \sin t$, $f_3(t) = e^{2t} \cos(e^t)$ (Pour la C-convergence de f_3 , on pourra, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ est convergente).

2°. $R \in \mathbb{R}_+^*$, on considère f définie par : $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^R} & \text{si } t \in]1, +\infty[\\ 1 & \text{si } t \in [0, 1] \end{cases}$

a). Etudier, suivant les valeurs de R , l'existence et la valeur de $I(f)$ puis de $C(f)$.

b) Montrer que si $R > 1$, $T > 1$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^T \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt = 0$; en déduire :

c) Etudier l'existence et la valeur de $A(f)$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt = 0$

II. Relations entre $A(f), C(f)$ et $I(f)$ où $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1°) On suppose que $I(f)$ existe. Montrer que cette intégrale est C-convergente et que $C(f) = I(f)$ (On pourra majorer $\left| \frac{1}{t} \int_0^t (F(u) - I(f)) du \right|$ en la décomposant en 2 parties)

2°) On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente. Montrer que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists T_0 : \left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) f(t) dt \right| \leq \int_0^{T_0} (1 - e^{-xt}) |f(t)| dt + \varepsilon/2$ (T_0 indépendant de x). En déduire que $A(f)$ existe et que $A(f) = I(f)$.

3°) a) On suppose que : $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall a > 0, \forall t > a : \left| \int_a^t f(u) du \right| \leq M$.

Montrer, en utilisant une primitive convenable de f et une intégration par parties

que : $\forall x > 0, \forall a > 0, \forall t > a : \left| \int_a^t e^{-xu} f(u) du \right| \leq M e^{-ax}$ En déduire que $G(x)$ existe

pour $x > 0$ (on pourra utiliser le critère de Cauchy : $\int_0^{+\infty} g(t) dt < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \forall t > a : \left| \int_a^t g(t) dt \right| < \varepsilon$)