

Problème: Fonctions elliptiques:

Soit $k \in]0, 1[$, on définit $f_k(\varphi)$ par: $f_k(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$

1°) Montrer que $f_k(\varphi)$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que: $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} f_k(\varphi) = +\infty$, $\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} f_k(\varphi) = -\infty$.
En déduire que f_k admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit am_k cette fonction réciproque: $f_k(\varphi) = \text{am}_k^{-1}(\varphi)$. On pose: $\omega_k = 2 \text{am}_k^{-1}(\pi/2)$. Montrer que am_k est une fonction impaire, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que l'on a: $\text{am}_k(u + \omega_k) = \text{am}_k(u) + \pi$.

3°) On pose: $\text{dn}_k(u) = \text{am}'_k(u)$, $\text{cn}_k(u) = \cos(\text{am}_k(u))$, $\text{sn}_k(u) = \sin(\text{am}_k(u))$.

Montrer que: a) dn_k est paire, périodique de plus petite période ω_k
b) cn_k est paire, périodique de plus petite période $2\omega_k$
c) sn_k est impaire, périodique de plus petite période $2\omega_k$.

d) On a les identités: $\text{cn}_k^2(u) + \text{sn}_k^2(u) = 1$ et $\text{dn}_k^2(u) + k^2 \text{sn}_k^2(u) = 1$

4°) Exprimer les dérivées des fonctions cn_k , sn_k et dn_k à l'aide de ces mêmes fonctions.

Etudier les variations et tracer le graphe de $\text{dn}_k(u)$ pour $u \in [0, \frac{\omega_k}{2}]$. On ne cherchera pas à localiser le point d'inflexion.

5°) Montrer que la restriction de sn_k à $[-\frac{\omega_k}{2}, \frac{\omega_k}{2}]$ est une bijection sur $[-1, +1]$. On notera sn_k^{-1} la bijection réciproque.

De même, on pose $\text{sd}_k(u) = \text{sn}_k(u) / \text{dn}_k(u)$. Montrer que la restriction de sd_k à $[-\frac{\omega_k}{2}, \frac{\omega_k}{2}]$ réalise une bijection sur $[-\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}]$. On notera sd_k^{-1} la bijection réciproque. Calculer $(\text{sn}_k^{-1}(t))'$ et $(\text{sd}_k^{-1}(t))'$.

6°) On veut déterminer les D.L. de ces fonctions à l'ordre 5 dans V_0 .

a) Si f et f^{-1} sont deux fonctions réciproques qui admettent les D.L.: $f(x) = x + a_1 x^3 + a_2 x^5 + o(x^5)$ et $f^{-1}(t) = t + b_1 t^3 + b_2 t^5 + o(t^5)$ montrer alors que: $b_1 = -a_1$ et $b_2 = 3a_1^2 - a_2$.

b) Donner alors les D.L. à l'ordre 5 dans V_0 des fonctions: $f_k(\varphi)$, $\text{am}_k(u)$, $\text{sn}_k(u)$, $\text{cn}_k(u)$, $\text{sd}_k(u)$, $\text{sn}_k^{-1}(t)$, $\text{sd}_k^{-1}(t)$.