

b) Montrer que, si $I(f)$ existe, $G(x)$ existe pour $x > 0$. On garde cette hypothèse

c) Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0 : \left| \int_0^{+\infty} (e^{-xu} - 1) f(u) du \right| \leq \varepsilon_2 + \int_0^{a_0} (1 - e^{-xu}) |f(u)| du + \left| \int_{a_0}^{+\infty} e^{-xu} f(u) du \right|$
 a_0 étant indépendant de x . En déduire que $A(f)$ existe et que $A(f) = I(f)$.

4°). Montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-xu} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Problème 2 : espaces quadrilatéraux :

Soit (E, N) un e.v. normé (N sa norme), on pose :

$$\Delta(x, y, z) = N(x) + N(y) + N(z) + N(x+y+z) - (N(x+y) + N(y+z) + N(z+x))$$

On dit que (E, N) est quadrilatéral si $\forall (x, y, z) \in E^3 : \Delta(x, y, z) \geq 0$ (H).

1°). Montrer que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est quadrilatéral (supposer d'abord que $z=0$, puis envisager le cas où aucun des réels x, y, z n'est nul en distinguant les différents cas selon les signes de x, y, z — on peut se ramener à 2 cas —).

2°) Soit $E = \mathbb{R}^3$, on prend $N_1(x) = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ et $N_\infty(x) = \sup_{i \in \{1, 2, 3\}} |x_i|$.

Montrer que (E, N_1) est quadrilatéral mais que (E, N_∞) ne l'est pas.

3°) Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, on prend : $\|f\|_1 = \int_{-1}^1 |f(x)| dx$ et $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)|$.

a) Montrer que $(E, \|\cdot\|_1)$ est quadrilatéral.

b) Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ ne l'est pas, en considérant 3 fonctions :

$$f_1(x) = 2x^2 - 1, \quad f_2(x) = x^3 - x^2 + 1 \quad \text{et} \quad f_3(x) = -x^3 - x^2 + 1.$$

4°) Soit (E, N) un espace quadrilatéral de dim. 3 et $\mathcal{E}$ un espace affine attaché à E ; soit d la distance définie par : $d(A, B) = N(\overrightarrow{AB})$. Soit O une origine de $\mathcal{E}$ et x, y, z 3 vecteurs indépendants; on appelle "parallélépipède engendré par x, y, z " (noté $P_{(x, y, z)}$) l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées dans le repère (O, x, y, z) valent 0 ou 1. Ces points sont les sommets de $P_{(x, y, z)}$. Le segment joignant les sommets de coordonnées (a, b, c) et (a', b', c') dont la longueur est $N(a-a', b-b', c-c')$ est appelé respectivement "arête", "F-diagonale", "P-diagonale", selon que $|a-a'| + |b-b'| + |c-c'| = 1, 2$ ou 3 .

a) Faire une figure illustrant les définitions précédentes.

b) Prouver que le périmètre de $P_{(x, y, z)}$, somme des longueurs des arêtes est $\geq$ à la somme des longueurs des F-diagonales = la somme des longueurs des P-diagonales.