

II. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, de degré 3 qui s'écrit: $P(x) = (x-z)Q(x)$

où z est la plus grande racine réelle de P (peut-être la seule) et

$Q(x) = x^2 - 2\alpha x + \beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On cherche les primitives de $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$.

1°) Déterminer les 2 couples (λ_0, x_0) et (λ_1, x_1) de réels avec $\lambda_0 \neq \lambda_1$, tels que: $Q(x) \pm \lambda_0(x-z) = (x-x_0)^2$ et $Q(x) + \lambda_1(x-z) = (x-x_1)^2$. On supposera que $\lambda_0 < \lambda_1$. En déduire que l'on peut écrire $P(x) = [(x-x_1)^2 - (x-x_0)^2][\alpha(x-x_1)^2 + \beta(x-x_0)^2]$ où (α, β) sont des réels que l'on déterminera en fonction de λ_0 et λ_1 .

2°) On suppose que $P(x)$ a 3 racines réelles distinctes. Montrer que l'on a alors $\lambda_0 < \lambda_1 < 0$ et que l'on peut écrire:

$P(x) = B^2 [(x-x_1)^2 - (x-x_0)^2] \cdot [(x-x_1)^2 - k^2(x-x_0)^2]$ où B et k sont deux réels strictement positifs, avec de plus $k < 1$, que l'on déterminera en fonction de λ_0 et λ_1 . Calculer la dérivée de $\operatorname{sd}_k^{-1}\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)$; en déduire une expression simple d'une primitive de $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ en fonction de (x_0-x_1) , B et $\operatorname{sd}_k^{-1}\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)$.

3°) On suppose que $P(x)$ n'admet que z comme racine réelle. Montrer que l'on a alors $\lambda_0 < 0 < \lambda_1$ et que l'on peut écrire:

$P(x) = B^2 [(x-x_1)^2 - (x-x_0)^2] \cdot [(x-x_1)^2 + k^2(x-x_0)^2]$ où l'on déterminera les 2 nombres réels strictement positifs B et k en fonction de λ_0 et λ_1 .

On pose $k' = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ et $k_2 = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$. Calculer la dérivée de $\operatorname{sd}_{k'}^{-1}\left(\frac{1}{k_2} \frac{x-x_0}{x-x_1}\right)$. En déduire une primitive de $\frac{1}{\sqrt{P(x)}}$ en fonction de (x_0-x_1) , B , k' et $\operatorname{sd}_{k'}^{-1}\left(\frac{1}{k_2} \frac{x-x_0}{x-x_1}\right)$.

4°) Application: calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\omega_{1/2}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x(x+\frac{1}{3})(x+3)}}$