

I 1°. $k^2 \sin^2 \theta < 1 \Rightarrow f_k$ définie sur tout $\mathbb{R}$; f_k est la primitive d'i fct. paire et s'annule en 0 $\Rightarrow f_k$ impaire; $f_k'(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} > 0 \Rightarrow f_k$ strictement.

$f_k'(\varphi) \geq 1 \Rightarrow f_k(\varphi) \geq \varphi$ si $\varphi \geq 0 \Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} f_k(\varphi) = +\infty$ et $\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} f_k(\varphi) = -\infty$
(Cf: f_k admet i fct. réciproque définie sur tout $\mathbb{R}$.)

2°. am_k possède bien les propriétés demandées car f_k les possède.

Montrons que $am_k(u + \omega_k) = am_k(u) + \pi$: ce qui est équivalent à $u + \omega_k = \frac{\pi}{k^2} (am_k(u) + \pi)$
 $\Leftrightarrow u + \omega_k = \int_0^{am_k(u)} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} + \int_{am_k(u)}^{am_k(u)+\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}$: la 1^{ère} intégrale est égale à u , et comme on intègre une fct. périodique de période π , la

2^{de} est égale à: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \omega_k$.

3°. a). ω_k est bien une période de dn_k , montrons que c'est la plus petite période:

$f_k(\varphi + b) = f_k(\varphi) + c \Leftrightarrow f_k'(\varphi + b) = f_k'(\varphi) \Leftrightarrow b = k\pi$ donc: ($k \in \mathbb{Z}$).

$am_k(u + c) = am_k(u) + b \Leftrightarrow b = k\pi$ et par conséquent: $c = k \cdot \omega_k$.

Donc, $dn_k(u + c) = dn_k(u) \Rightarrow c = k \cdot \omega_k$: en conclusion, ω_k est la plus petite période.

b) Compte tenu des propriétés de cos et de am_k , on obtient le résultat.

c). Idem au b).

d) $cn_k^2 u + sn_k^2 u = 1$ (évident). $(am_k(u))' = \frac{1}{f_k'(\varphi)} = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{1-k^2 \sin^2(am_k(u))}$
et en élevant au carré: $dn_k^2(u) + k^2 sn_k^2(u) = 1$.

1°. $cn_k'(u) = -sn_k(u) dn_k(u)$, $sn_k'(u) = cn_k(u) dn_k(u)$ évident.

$dn_k'(u) = (\sqrt{1-k^2 sn_k^2(u)})' = -k^2 sn_k(u) cn_k(u) = -\frac{k^2}{2} \sin(2 am_k(u))$.

On a: $\frac{1}{2} \omega_k = f_k(\pi/2)$ donc, $am_k(\frac{\omega_k}{2}) = \pi/2$.

si $u \in [0, \frac{1}{2} \omega_k]$ alors $am_k(u) \in [0, \pi/2] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Sur $[-\frac{\omega_k}{2}, \frac{\omega_k}{2}]$, $am_k(u)$ varie de $-\pi/2$ à $\pi/2$

donc, $sn_k(u)$ unit de -1 à 1 $\Rightarrow sn_k$ admet une

fonction réciproque.

$sd_k'(u) = \frac{cn_k(u)}{dn_k^2(u)} > 0$ sd_k est strictement croissante:

et $sd_k(\frac{\omega_k}{2}) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \Rightarrow sd_k$ est une bij. de $[-\frac{\omega_k}{2}, \frac{\omega_k}{2}]$ sur $[\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}]$
($cn_k(u) > 0$ car $u \in [-\frac{\omega_k}{2}, \frac{\omega_k}{2}]$)

$(sn_k^{-1}(t))' = \frac{1}{cn_k(u) dn_k(u)} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}$

de même $(sd_k^{-1}(t))' = \frac{dn_k^2(u)}{cn_k(u)} = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 t^2} \sqrt{1+(k^2-1)t^2}}$: en effet: $t^2 = \frac{sn_k^2(u)}{1-k^2 sn_k^2(u)} \Rightarrow sn_k^2(u) = \frac{t^2}{1+k^2 t^2}$
comme t et u sont de

même signe: $sn_k(u) = \frac{t}{\sqrt{1+k^2 t^2}}$, $cn_k(u) = \frac{\sqrt{1+(k^2-1)t^2}}{\sqrt{1+k^2 t^2}}$, $dn_k(u) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2 t^2}}$ d'où le résultat.

6°) a)

On écrit la D.L. de $f(f^{-1}(t)) = t$ et on trouve les relations demandées.

b) Par intégration, on trouve: $f_k(\varphi) = \varphi + k^2 \frac{\varphi^3}{6} + k^2 (9k^2-4) \frac{\varphi^5}{120} + o(\varphi^5)$.

grâce au a), on en déduit: $am_k(u) = u - \frac{k^2 u^3}{6} + k^2 (9k^2-4) \frac{u^5}{120} + o(u^5)$.