

Problème 1.

I. 1°. a). $\int_0^T e^{-xt} \cos t \, dt = \frac{1}{x^2+1} [e^{-T}(-x \cos T + \sin T) + x]$; $\int_0^T e^{-xt} \sin t \, dt = \frac{1}{x^2+1} [e^{-T}(x \cos T - \sin T) + 1]$

b) (f_1) $I(f_1)$ n'existe pas; à l'aide de la formule ci-dessus: $G_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$ donc,

$A(f_1) = 1$; $F_1(u) = 1 - \cos u \Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t F_1(u) du = \frac{1}{t} (t - \sin t) \Rightarrow C(f_1) = 1$.

(f_2) : $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt = \frac{1}{2} [e^{-t}(-\cos t - \sin t)]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} = I(f_2)$; $G_2(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$A(f_2) = \frac{1}{2}$; $F_2(u) = \frac{1}{2} e^{-u}(-\cos u - \sin u) + \frac{1}{2}$.

$\int_0^t F_2(u) du = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{-u}(-2 \cos u) \right]_0^t = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} e^{-t} \cos t - \frac{1}{2} \Rightarrow C(f_2) = \frac{1}{2}$.

(f_3) : $F_3(t) = \int_0^{e^t} e^{2u} \cos(e^u) du = \int_1^{e^t} v \cos v \, dv = \cos(e^t) + e^t \sin(e^t) - \cos 1$.

donc, $I(f_3)$ n'existe pas.

$\int_0^T e^{-xt} e^{2t} \cos(e^t) dt = \int_1^{e^T} v^{-x+1} \cos v \, dv = [v^{-x+1} \sin v]_1^{e^T} - (1-x) \int_1^{e^T} \frac{\sin v}{v^x} dv$.

or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin v}{v^x} dv$ converge (faire une intégration par parties) et $[v^{-x+1} \sin v]_1^{+\infty}$ diverge

pour $x \in]0, 1]$ donc, $G_3(x)$ n'existe pas, on ne peut définir $A(f_3)$.

$\int_0^t F_3(u) du = -t(\cos 1 + \sin 1) + \int_1^{e^t} \frac{\cos v}{v} dv + \int_1^{e^t} \sin v \, dv$: or $\int_1^{+\infty} \frac{\cos v}{v} dv$ et $\int_1^{e^t} \sin v \, dv$ est borné donc, $C(f_3) = -\cos 1 - \sin 1$.

Remarque: on a étudié 3 cas: $I(f)$ existe alors, $A(f)$ et $C(f)$ existent et ces 3 nombres sont égaux. $I(f)$ n'existe pas, $A(f)$ existe alors $C(f)$ existe et $A(f) = C(f)$ et enfin, $I(f)$ et $A(f)$ n'existent pas mais $C(f)$ existe; on va préciser ceci par la suite.

2°. a). il faut que $R > 1$ pour que $I(f)$ existe et $I(f) = 1 + \frac{1}{R-1} = \frac{R}{R-1}$.

$F(u) = 1 - \frac{1}{(R-1)u^{R-1}}$ si $u > 1$ et $R \neq 1$, $F(u) = 1 + \ln u$ si $R = 1$. ($F(u) = u$ si $u \leq 1$).

$\int_0^t F(u) du = \int_0^1 F(u) du + \int_1^t F(u) du = \frac{1}{2} + (t-1) \frac{1}{R-1} + \frac{1}{(R-1)(R-2)} \left[\frac{1}{t^{R-2}} - 1 \right]$ si $R \in \{1, 2\}$.

$\Rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du = \frac{1}{R-1} + o(1)$ si $R > 1$.

$R < 1$: $\frac{1}{t} \left(\frac{1}{t^{R-2}} \right) \rightarrow +\infty$ donc, $C(f)$ n'existe pas.

$R = 1$: $\frac{1}{t} \int_0^t F(u) du = 1 + \frac{1}{t} [u \ln u - u]_1^t = 1 + \ln t - 1 \rightarrow +\infty$

Conclusion, $C(f)$ existe si $R > 1$.

b). $e^{-xt} \geq 1 - xt$. (car e^{-xt} est convexe) $\Rightarrow 0 \leq \int_0^T \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt \leq x \int_0^T \frac{dt}{t^{R-1}}$.

donc: $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^T \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt = 0$. Puis: $\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt = \int_0^T \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt + \int_T^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt \leq x \int_0^T \frac{dt}{t^{R-1}} + \int_T^{+\infty} \frac{dt}{t^R}$.

On peut choisir T pour que $\int_T^{+\infty} \frac{dt}{t^R} < \varepsilon_2$ et ensuite, on prend x suffisamment

petit pour que: $x \int_0^T \frac{dt}{t^{R-1}} < \varepsilon_2$ et on peut conclure $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t^R} dt = 0$

c) On peut dire que: $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^R} dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^R} = \frac{1}{R-1}$; or: $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1 - e^{-x}}{x} \rightarrow 1$

donc, $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^R} dt \rightarrow 1 + \frac{1}{R-1} = \frac{R}{R-1} = I(f) = A(f)$