

Corrigé du devoir

I. n est impair $\Rightarrow$ étude sur $[0, \pi]$ + sym/0y

Asymptote: $\alpha = \theta - \pi/3 \Rightarrow r \sin \alpha = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{12} \alpha + o(\alpha)$

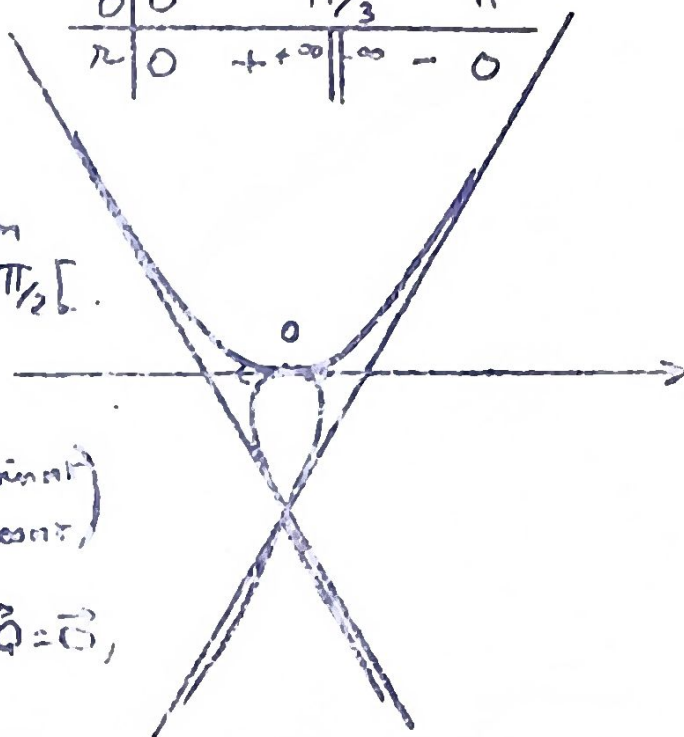
Points d'inflexions: $\frac{1}{r^2} + (\frac{1}{r})'' = -\frac{2}{\sin^3 \theta} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 1)$

Il faut résoudre: $\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 1 = 0$: une seule solution

comprise entre -1 et 1 : $\exists \theta_0 \cdot \varphi(\theta_0) = 0, \theta_0 \in]-\pi/3, \pi/3[$.

Points doubles pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$.

θ	0	$\pi/3$	π
r	0	$+\infty$	$-\infty$



II. 1°). $\vec{OM} = \begin{pmatrix} \lambda \cos t + \mu \cos t \\ \lambda \sin t + \mu \sin t \end{pmatrix}$ $\frac{d\vec{M}}{dt} = \begin{pmatrix} -\lambda \sin t - \mu \sin t \\ \lambda \cos t + \mu \cos t \end{pmatrix}$

et $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} \cos t - \cos t \\ \sin t - \sin t \end{pmatrix}$ et en exprimant que $\frac{d\vec{M}}{dt} \wedge \vec{PQ} = \vec{0}$,

on trouve: $\lambda = \mu$ i.e. $\lambda = \frac{n}{n+1}$ et $\mu = \frac{1}{n+1}$.

2°. $\vec{F} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n \cos t + \cos t \\ n \sin t + \sin t \end{pmatrix}$. On vérifie que: $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t) \Rightarrow$ sym/0x

D'autre part, $\begin{cases} x(t + \frac{2\pi}{n+1}) = \cos \frac{2\pi}{n+1} \cdot x(t) - \sin \frac{2\pi}{n+1} \cdot y(t) \\ y(t + \frac{2\pi}{n+1}) = \sin \frac{2\pi}{n+1} \cdot x(t) + \cos \frac{2\pi}{n+1} \cdot y(t) \end{cases}$

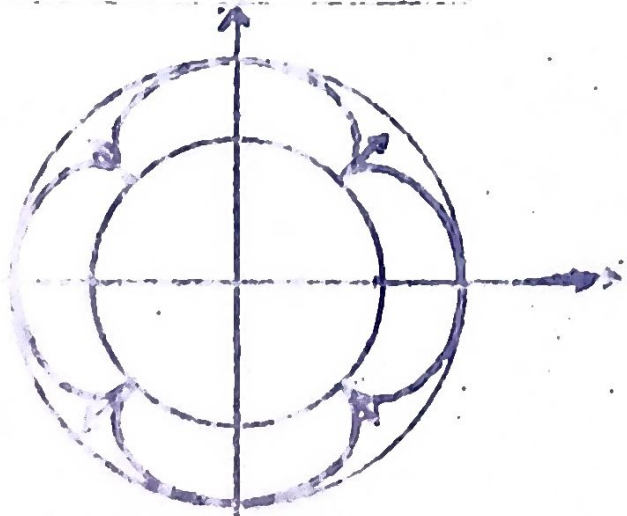
Donc Γ_n est invariante par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n+1}$ et de centre 0.

Pour construire Γ_n , on étudie x et y sur $[0, \frac{\pi}{n+1}]$ puis on fait une symétrie /0x et $n-1$ rotations d'angle $\frac{2\pi}{n+1}$.

3°. $\begin{cases} x = \frac{1}{3} (5 \cos t + \cos 5t) \\ y = \frac{1}{3} (5 \sin t + \sin 5t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -\frac{5}{3} \sin 3t \cos 2t \\ y' = \frac{5}{3} \cos 3t \cos 2t \end{cases}$ $\Gamma_{-1} \begin{cases} x = \frac{1}{3} (4 \cos t - \cos 4t) \\ y = \frac{1}{3} (4 \sin t + \sin 4t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{8}{3} \sin \frac{3t}{2} \cos \frac{5t}{2} \\ y' = \frac{8}{3} \cos \frac{3t}{2} \cos \frac{5t}{2} \end{cases}$

$\frac{y'}{x'} = \tan(3t + \frac{\pi}{2})$ et on fait l'étude sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ | $\frac{y'}{x'} = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{3t}{2})$, on fait l'étude sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$
x'	0	-	0
x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$
t'			



t	0	$\pi/2$
x'	0	+
x	0	$\frac{6 \cos \pi}{3} = -2$
y	0	$\frac{8 \sin \pi}{3} = 0$
t'		

