

Par composition, on a : $\{sn_R(u) = u - (R^2+1)\frac{u^3}{6} + (R^4+14R^2+1)\frac{u^5}{120} + o(u^5)\}$

de même : $\{cn_R(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + (4R^2+1)\frac{u^4}{24} + o(u^5)\}$.

Par division, on trouve : $\{sd_R(u) = u + (2R^2-1)\frac{u^3}{6} + (16R^4-16R^2+1)\frac{u^5}{120} + o(u^5)\}$

Puis, à l'aide du b) : $\{sn_R^{-1}(t) = t + (R^2+1)\frac{t^3}{6} + (3R^4+2R^2+3)\frac{t^5}{40} + o(t^5)\}$.

et $\{sd_R^{-1}(t) = t - (2R^2-1)\frac{t^3}{6} + (8R^4-8R^2+3)\frac{t^5}{40} + o(t^5)\}$.

II.

1°/ On obtient : $2s - d_0 = 2x_0$, $p - d_0 x = x_0^2 \Rightarrow \Delta^2 - 4\Delta(\Delta - x) + 4(\Delta^2 - p) = 0$

$\Delta' = 4$. $Q(x) > 0$ car x est la plus grande racine ; $\Delta = 2(\Delta - x) \pm 2\sqrt{Q(x)}$

On a : $(x - x_1)^2 - (x - x_0)^2 = (\Delta_1 - \Delta_0)(x - x_1)$ et : $(\Delta_0 - \Delta_1) \cdot Q(x) = \Delta_0(x - x_1)^2 - \Delta_1(x - x_0)^2$

d'où : $P(x) = [(x - x_1)^2 - (x - x_0)^2][\alpha(x - x_1)^2 + \beta(x - x_0)^2]$ où $\alpha = -\frac{\Delta_0}{(\Delta_0 - \Delta_1)^2}$ et $\beta = \frac{\Delta_1}{(\Delta_0 - \Delta_1)^2}$

2°. Si on appelle x_0 et x_1 les autres racines de P , on a :

$p = x_0 x_1$, et $s = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$, donc : $\Delta - x < 0$ et $\Delta^2 - p > 0 \Rightarrow \Delta_1$ et Δ_0 sont négatives,

et $\Delta_0 < \Delta_1 < 0$. En identifiant avec le 1°, on trouve : $B^2 = \frac{-\Delta_0}{(\Delta_0 - \Delta_1)^2}$ et $R^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$

On a bien $R^2 < 1$.

On a : $\left(sn_R^{-1}\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)^2} \sqrt{1-R^2\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)^2}} \times \frac{x_0-x_1}{(x-x_1)^2} = \frac{(x_0-x_1) \cdot B}{\sqrt{P(x)}}$

d'où : $\int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{1}{B(x_0-x_1)} sn_R^{-1}\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right) + C$

3°. L'équation $x^2 - 2sx + p = 0$ n'a pas de racine réelle $\Leftrightarrow \Delta^2 - p < 0$, or :

$\Delta_0 \Delta_1 = 4(\Delta^2 - p) \Rightarrow$ elles sont de signes contraires, on pose $B^2 = \frac{-\Delta_0}{(\Delta_0 - \Delta_1)^2}$ et $R^2 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}$

$\left[sd_R^{-1}\left(\frac{1}{R'} \frac{x-x_0}{x-x_1}\right)\right]' = \frac{1}{\sqrt{\left(1+R^2\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)^2\right)}} \times \frac{x_0-x_1}{R'(x-x_1)^2}$
 $= \frac{B(x_0-x_1)}{R' \sqrt{P(x)}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{R'}{B(x_0-x_1)} sd_R^{-1}\left(\frac{1}{R'} \frac{x-x_0}{x-x_1}\right) + C$

4°. On est dans le cas du 2°. , $x = 0$, on trouve :

$\Delta_1 = -4/3$, $\Delta_0 = -16/3$, $x_0 = 1$, $x_1 = -1$, $R = 1/2$, $B = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} sn_R^{-1}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} sn_R^{-1}(1)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} sn_R^{-1}(1)$ donc, la limite demandée vaut : $\frac{\sqrt{3}}{\omega_{1/2}} sn_{1/2}^{-1}(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. car $sn_{1/2}^{-1}(1) = \omega_{1/2}$.