

$$\text{II. 1}^\circ. \frac{1}{t} \int_0^t F(u) du - I(F) = \frac{1}{t} \int_0^t (F(u) - I(F)) du = \Delta(t) = \frac{1}{t} \int_0^T (F(u) - I(F)) du + \frac{1}{t} \int_T^t (F(u) - I(F)) du \quad (2)$$

comme $I(F)$ existe, $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = I(F)$ donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists T : u > T \Rightarrow |F(u) - I(F)| < \varepsilon/2$.

Donc, $|\Delta(t)| \leq \frac{1}{t} \int_0^T |F(u) - I(F)| du + \frac{t-T}{t} \cdot \varepsilon/2$; on choisit maintenant t assez grand pour que $\frac{t-T}{t} \cdot \varepsilon/2 < \varepsilon/2$ et on peut conclure.

$$2^\circ. \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) f(t) dt \text{ est A.C. et } \left| \int_T^{+\infty} (1 - e^{-xt}) f(t) dt \right| \leq \int_T^{+\infty} |f(t)| dt.$$

donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists T_0, \int_{T_0}^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon/2$. et on utilise l'inégalité: $1 - e^{-xt} \leq xt$.

d'où: $\left| \int_0^{+\infty} (1 - e^{-xt}) f(t) dt \right| < x \cdot \int_0^{T_0} t \cdot |f(t)| dt + \varepsilon/2$ et on choisit x assez petit pour que: $x \cdot \int_0^{T_0} t \cdot |f(t)| dt < \varepsilon/2$ c.q.f.d. Donc, $\boxed{A(F) = I(F)}$.

3°. a) On prend $H(t) = \int_0^t f(u) du$ d'où:

$$\int_0^t e^{-xu} f(u) du = [e^{-xu} H(u)]_0^t + \int_0^t x e^{-xu} H(u) du = e^{-xt} H(t) + \int_0^t x e^{-xu} H(u) du$$

On majore $|H(t)|$ et $|H(u)|$ par $M \Rightarrow \left| \int_0^t e^{-xu} f(u) du \right| \leq M e^{-xt} + M \cdot [-e^{-xu}]_0^t = M e^{-ax}$.

Si on choisit $x > 0$, alors, $\forall \varepsilon > 0, \exists a, M e^{-ax} < \varepsilon$. donc, $G(x)$ existe.

b). Si $I(F)$ existe, la propriété du 3°. a subsiste, donc, $G(x)$ existe.

$$c). \int_0^{+\infty} (e^{-xu} - 1) f(u) du = - \int_0^{+\infty} f(u) du + \int_0^{+\infty} (e^{-xu} - 1) f(u) du + \int_0^{+\infty} e^{-xu} f(u) du$$

comme $I(F)$ existe, $\forall \varepsilon > 0, \exists a_0, \left| \int_0^{+\infty} f(u) du \right| \leq \varepsilon/2$, on a donc l'inégalité

$$\text{demandée. Ensuite: } \int_0^{a_0} (1 - e^{-xu}) |f(u)| du \leq x \cdot \int_0^{a_0} |f(u)| du \text{ et } \left| \int_{a_0}^{+\infty} e^{-xu} f(u) du \right| \leq M e^{-a_0 x}$$

(En fait, M dépend de a_0 et on a même: $M = \left| \int_0^{a_0} f(u) du \right|$ donc, $M \leq \varepsilon/2$)

Ensuite, comme $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_0^{a_0} u |f(u)| du = 0$, on pourra majorer cette dernière quantité par ε , on peut alors conclure.

4°. On a vu que: $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ existait, donc, il suffit d'utiliser la conclusion du 3°. c).

Problème 2:

1° si $z = 0$: $\Delta(x, y, 0) = 0$, il suffit donc, maintenant d'étudier le cas où aucun des réels x, y, z n'est nul. Si x, y, z sont de même signe:

$\Delta(x, y, z) = 0$. Le dernier cas à étudier est celui où x et y sont de même signe (par exemple > 0) et $z < 0$. D'où, si on pose $z' = -z$:

$$\Delta(x, y, z) = |x + y - z'| + z' - |x - z'| - |y - z'|.$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } z' \geq x + y: \Delta(x, y, z) = 0.$$

$$2^{\text{ième}} \text{ cas: } x \leq y \leq z' < x + y: \Delta(x, y, z) = 2[x + y - z'] > 0.$$

$$3^{\text{ième}} \text{ cas: } x \leq z' \leq y: \Delta(x, y, z) = 2x > 0.$$

$$4^{\text{ième}} \text{ cas: } z < x \leq y: \Delta(x, y, z) = 2z' > 0.$$