

Corrigé du devoir

I. $x'(t) = \frac{2(t-1)}{(t+1)^3}$

$y'(t) = \frac{(t-1)(t^2+4t-1)}{(t+1)^3}$

$t_1 \approx 4,23 \quad x(t_1) \approx -181 \quad y(t_1) \approx -11$

$t_2 \approx 0,23 \quad x(t_2) \approx 0,69 \quad y(t_2) \approx 0,09$

t	$-\infty$	-2,5	-1	-2,5	1	$+\infty$
x'	+	+	+	-	-	+
x						
y						
y'	+	0	-	+	0	+

Branches inférieures: $t \rightarrow -1: y+2x = \frac{t^2+t+2}{t+1} \rightarrow \infty \Rightarrow$ D.A. de pente -2

$t=1: x'(1)=y'(1)=0 \Rightarrow$ p' stationnaire: $\frac{y'(1)}{x'(1)} = 2$

Pointe d'inflexion: $\frac{y'}{x'} = \frac{t^2+4t-1}{2} \Rightarrow \left(\frac{y'}{x'}\right)' = t+2: x(-2)=5 \quad y(-2)=-18$

II. Etude sur $[0, 2\pi]$. $x' = -\frac{4+2\sin\theta+2\cos\theta}{(1+2\sin\theta)^2} < 0$

θ	0	$\pi/3$	$2\pi/3$	$4\pi/3$	$5\pi/3$	2π
x	5					3

Asymptotes:

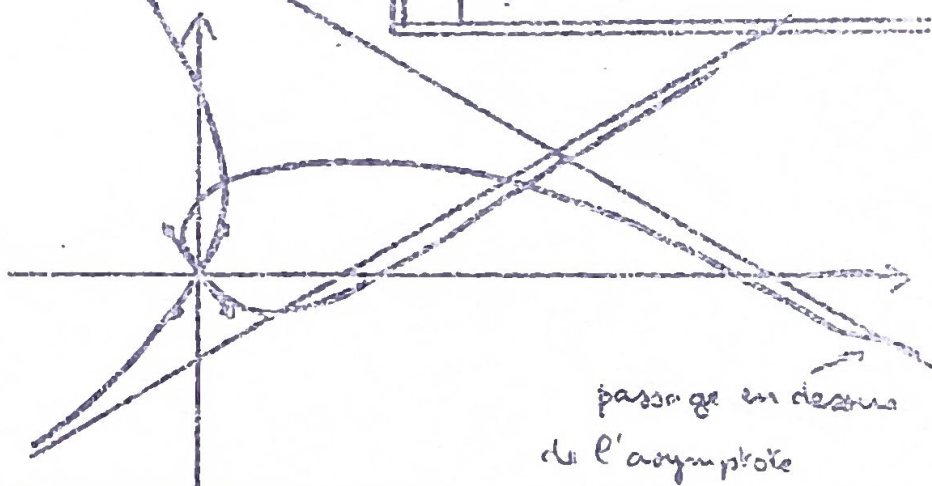
$\theta \rightarrow \frac{2\pi}{3}: t = \theta - \frac{2\pi}{6} \Rightarrow x \sin t = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1+\sqrt{3}}{6}t + o(t)$

$\theta \rightarrow \frac{4\pi}{3}: t = \theta - \frac{4\pi}{6} \Rightarrow x \sin t = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}-1}{6}t + o(t)$

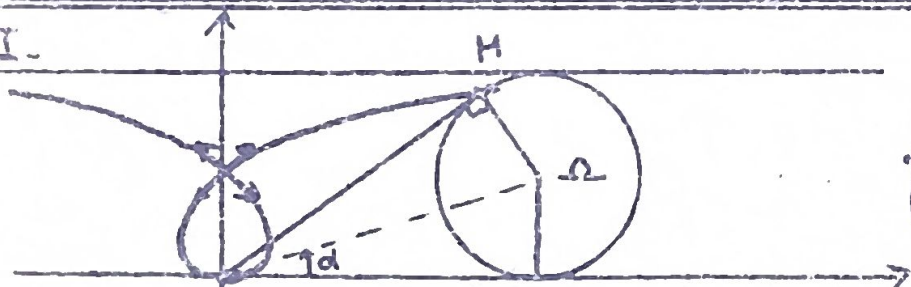
Points doubles: $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{12}: x = \frac{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1+\sqrt{2-\sqrt{3}}} \approx 1,93$

$\theta = \frac{5\pi}{12}: x = \frac{1+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \approx 0,52$



III.



$y-a = a \cdot \frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}$

$\Rightarrow$ en faisant un changement de repère: $O'(a)$ et $\vec{I} = \vec{J}, \vec{J} = -\vec{I}$

$\Rightarrow X = a \frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}$ et en faisant un changement

$Y = -t \frac{t^2-a^2}{t^2+a^2}$ de paramètre: $u = -at$

$X = a \cdot \frac{u^2-1}{u^2+1}$

$Y = a u \frac{u^2-1}{u^2+1}$ c.q.f.d.

On prend $\Omega\left(\frac{t}{a}\right) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a}{t}$. $OM = t$.

$$\begin{cases} x = t \cos 2\alpha = t \cdot \frac{t^2-a^2}{t^2+a^2} & \text{équations} \\ y = t \sin 2\alpha = \frac{2at^2}{t^2+a^2} & \text{paramétriques} \end{cases}$$
 d'une strophoïde droite.

IV. Montrons que la tangente est donnée par

Une paramétrisation de l'hyperbole est: $x = a \cosh t$

$\Rightarrow$ équation de la tangente au p' de paramètre t_0 : $y - b \sinh t_0 = \frac{b \cosh t_0}{a \sinh t_0} (x - a \cosh t_0) \Rightarrow$

$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{y'}{x'} = \frac{b \cosh t}{a \sinh t}$

$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1$