

Les deux parties, I et II, sont indépendantes.

I. On considère le système différentiel :

$$(S) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y \\ \frac{dy}{dt} = -x - y + e^{-t} \end{cases}$$

où x et y sont les fonctions inconnues,

de la variable réelle t , à valeurs réelles.

1°) Vérifier que (S) admet une solution de la forme: $x = \alpha e^{-t}$, $y = \beta e^{-t}$

2°) Intégrer (S) en formant une équation différentielle $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

linéaire du second ordre vérifiée par l'une des inconnues.

3°) Montrer que (S) a une solution (x_0, y_0) , unique, telle que :

$x_0(0) = y_0(0) = 0$. Expliciter $x_0(t)$ et $y_0(t)$ (on montrera que

$x_0(t) = e^{-t}(a + b \cos t)$ et $y_0(t) = c e^{-t} \sin t$).

4°) Soient : A un plan affine euclidien, rapporté au repère ortho-normé Oxy , C la partie de A décrite par $M(x_0(t), y_0(t))$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$, C_0 la partie de C décrite par M lorsque t décrit $[0, 2\pi]$.

a) Construire C_0 (donner les valeurs des points remarquables de C_0 avec une inexactitude absolue inférieure à 10^{-3} , prendre sur chaque axe une unité de longueur égale à 50 cm).

b) Par quelles transformations géométriques simples déduit-on C de C_0 ?

II.

1°) A tout entier n , on associe : $(E_n) \quad y'' + (2n+1-x^2)y = 0$

où y est la fonction inconnue, à valeurs réelles, de la variable réelle x .

a) Former l'équation différentielle (F_n) vérifiée par $Y = e^{x^2/2} \cdot y$

b) Y est indéfiniment dérivable, soit: $Y = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + o(x^p)$

le développement limité de Y à l'ordre p . Donner la relation entre a_p et a_{p-2} en écrivant que Y est solution de (F_n) .

c) Montrer que, sous des conditions à préciser, $\forall p > n$, $a_p = 0$ en déduire que (F_n) admet des solutions polynomiales de degré n . Soit H_n celle dont le terme de degré n est $2^n x^n$ (ne pas calculer les coef. de H_n).