

Problème:

On notera L^2 l'ensemble des fonctions de carré intégrable (et continue) sur $\mathbb{R}_+$ (i.e. les fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+$ telles que $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ existe).

Dans les parties I et II, on étudiera un cas particulier.

I.

1°) a) Pour $x \neq 0$, montrer que l'intégrale: $\int_0^{+\infty} \frac{t \operatorname{Arctg}(1/t)}{(t^2 + x^2)^a} dt$ a un sens si $a > 1/2$.

On notera, par la suite, sa valeur par $I_a(x)$. On pose alors $g(x) = I_1(x)$ et $h(x) = I_2(x)$.

b) Montrer que pour $x > 0$, $h(x) = \frac{\pi}{4x^2(x+1)}$. En déduire la valeur de $h(x)$ pour $x < 0$.

2°) a) Montrer que pour $u > 0$, on a: $0 < \operatorname{Arctg} u < u$; en déduire que pour $x > 0$, $0 < g(x) < \frac{\pi}{2x}$. Quelle est la limite de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$?

b) Si $0 < x < 1$, montrer que: $\frac{\pi}{8} \ln \frac{x^2+1}{x^2} < \int_0^1 \frac{t \operatorname{Arctg}(1/t)}{t^2 + x^2} dt$. En déduire que $g(x) \rightarrow +\infty$ si $x \rightarrow 0^+$.

On admettra par la suite que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $g'(x) = -2x h(x)$.

3°) Déterminer $g(x)$: d'abord pour $x > 0$ puis pour $x < 0$. Quel est l'équivalent de g quand x tend vers 0^+ ou 0^- .

II.

g est la fonction étudiée au I.

1°) Étudier les variations de: $\ell(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(1-x)} - g(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi(x+1)}{2(1-x)^2} - g(x) & \text{si } x < 0. \end{cases}$

2°) Étudier les variations de: $\ell(x) = \frac{x}{(1+x)^4} g(x)$ et $\ell(0) = 0$, tracer sa courbe représentative.