

## EXERCICE 1: (juste avant Tchernobyl...)

$X$  et  $Y$  sont 2 applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , différentiables en  $(x_0, y_0)$ . On

notera:  $\frac{\partial X}{\partial x}(x_0, y_0) = a$ ,  $\frac{\partial X}{\partial y}(x_0, y_0) = b$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial x}(x_0, y_0) = c$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial y}(x_0, y_0) = d$ .

$i$  désigne le nombre complexe  $(0, 1)$ ; si  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , on pose:

$$A_\theta(\lambda) = \frac{1}{\lambda e^{i\theta}} \left[ X(x_0 + \lambda \cos \theta, y_0 + \lambda \sin \theta) + i Y(x_0 + \lambda \cos \theta, y_0 + \lambda \sin \theta) - X(x_0, y_0) - i Y(x_0, y_0) \right]$$

1°)  $\theta$  étant supposé fixé, montrer que  $A_\theta(\lambda)$  admet une limite  $B(\theta)$  quand  $\lambda$  tend vers 0. Calculer  $B(\theta)$  en fonction de  $a, b, c, d$  et  $\theta$ .

2°) Soit  $m(\theta)$  le point du plan complexe d'affixe  $B(\theta)$  et  $\gamma$  l'ensemble des points  $m(\theta)$  quand  $\theta$  décrit  $[0, \pi]$ . Montrer que  $\gamma$  est un cercle, déterminer son centre et son rayon.

3°) Dans cette question,  $X$  et  $Y$  sont définies par  $X(x, y) + i Y(x, y) = \sin(\bar{z})$  où  $\bar{z} = x - iy$ . Déterminer le centre et le rayon du cercle  $\gamma$  pour un point quelconque  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$ . (d'après ENSAM 85)

## EXERCICE 2:

On appelle  $(C)$  l'ensemble des points du plan affine euclidien vérifiant:

$$x > 0, y > 0, x \neq y \text{ et } x^x = y^y.$$

1°) On appelle  $(D_t)$  la droite d'équation  $y = tx$  où  $t \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ .

Etudier l'intersection de  $(D_t)$  et de  $(C)$ ; en déduire une représentation paramétrique de  $(C)$  de la forme:  $x = u(t)$ ,  $y = v(t)$  où  $u$  et  $v$  sont des applications de  $]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.

On appelle  $M(t)$  le point de coordonnées  $(u(t), v(t))$ , déterminer

$\lim M(t)$  quand:  $t \rightarrow 0^+$ ,  $t \rightarrow 1$  et  $t \rightarrow +\infty$ .

2°)  $P, Q$  et  $R$  sont les points de coordonnées respectives:  $(1, 0), (0, 1), (\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$ .

On note  $(\bar{C}) = (C) \cup \{P, Q, R\}$ . Etudier les positions des points  $M(t)$  et

$M(1/t)$ ; qu'en déduit-on pour  $(\bar{C})$ ? Etudier les variations de

$u(t)$  et  $v(t)$  sur  $]0, 1[$ , préciser les tangentes à  $(\bar{C})$  en  $P, Q, R$  et

tracer la courbe  $(\bar{C})$ .