

EXERCICE 1 :

Soit l'équation différentielle : $y'' + 2y' - 8y = \frac{4x^2 + x - 1}{x^3}$ ①

1°). Résoudre cette équation.

2°). Soit A le point de coordonnées $(-1, 1/2)$; déterminer l'ensemble (U) des centres de courbure en A pour toutes les courbes intégrales de ① passant par A. ~~construire (U)~~. (Il n'est pas nécessaire d'utiliser le 1° ; poser $y' = \lambda$ et exprimer U en fonction de λ).

PROBLEME 1 :

On considère une courbe plane (Γ) donnée sous forme intrinsèque : $R = f(s)$. Soit M le point d'abscisse curviligne s sur Γ et C le centre de courbure en M. On détermine un point K du cercle de courbure en M par $(\vec{T}, \vec{CK}) = \alpha [2\pi]$.

1°) Faire un dessin explicite dans le cas où (Γ) est la parabole d'équation : $y = \frac{x^2}{2}$, M le point d'abscisse 1 et $\alpha = -\pi/4$.

2°) En écrivant la relation vectorielle : $\vec{OK} = \vec{OM} + \vec{MC} + \vec{CK}$ démontrer l'équivalence suivante : K décrit une trajectoire orthogonale à la famille des cercles de courbures $\Leftrightarrow \frac{dR}{ds} \cos \alpha + R \frac{d\alpha}{ds} + 1 = 0$ ①

(Faire intervenir les vecteurs $\vec{T} \cos \alpha + \vec{N} \sin \alpha = \vec{U}$ et $\vec{V} = -\vec{T} \sin \alpha + \vec{N} \cos \alpha$).

3°) Si (Γ) est la spirale logarithmique $r = e^\theta$ (en polaires), terminer l'intégration de ① en exprimant α en fonction de θ .

4°) On se propose de déterminer les courbes (Γ) telles qu'une des trajectoires orthogonales de leur cercle de courbure soit donnée par la relation : $s = \lg(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})$. Parmi les courbes (Γ) possibles, l'une, à un déplacement près, n'a pas d'inflexion ; montrer que sa détermination en paramétriques vis à vis de s se ramène à 2 intégrales non élémentaires.

PROBLEME 2 :

On pose : $I = [a, b]$, $E = \mathcal{O}_2(I, \mathbb{R})$, $F = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et on considère les équ. diff. : $y''(x) + q(x).y(x) = f(x)$ ① et $z''(x) + q(x)z(x) = 0$ ②