

(E_n) possède sur $\mathbb{R}$ la solution: $y_n = e^{-x^2/2} H_n$. On admettra que, de même, l'équation: $z'' - (2n+1+x^2)z = 0$ a sur $\mathbb{R}$ des solutions de la forme $z_n = e^{x^2/2} K_n$ où K_n est une fonction polynôme de degré n .

2°) a) Montrer que, si $n \geq 1$, H'_n (dérivée de H_n) est une solution de (E_{n-1}) .

b) En déduire: i) pour $n \geq 1$ H_{n-1} en fonction de H'_n .

ii) pour $n \geq 2$ une relation entre H_n, H_{n-1}, H_{n-2} .

3°) On suppose, uniquement dans cette question 3, que $n=1$.

a) En introduisant la fonction inconnue T telle que: $y = y_2 \cdot T$, exprimer les solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ à l'aide de $I(x) = \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt$.

b) En déduire que toute solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$ tend vers 0, $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (en utilisant l'inégalité: $t < x \Rightarrow \frac{1}{t^2} \geq \frac{t}{x^3}$ montrer que $I(x) \geq \frac{1}{2x^3} (e^{x^2} - e)$).

4°) Soit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u > 0, v > 0\}$, $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^2: \varphi(u, v) = (x, y)$ où $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ $y = uv$

a) Comparer les modules et les arguments de: $z = x + iy$, $t = u + iv$. Définir $D_1 = \varphi(D)$ et montrer que φ est une bijection de D sur D_1 .

b) Soit l'équation: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ (1) où f est une fonction inconnue de classe C^2 définie sur D_1 .

Former l'équation (2) vérifiée par $F = f \circ \varphi$. *

c) A quelles conditions doivent satisfaire les fonctions A et B , définies sur $]0, +\infty[$, de classe C^2 , pour que la fonction F définie sur D par: $F(u, v) = A(u) \cdot B(v)$ soit une solution de (2)?

En déduire à l'aide des fonctions y_n et z_n définies au II 1°, des solutions de (1)

* on calculera l'expression $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$