

III.

1°) a) Si u et v sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$, montrer alors que pour tout $x > 0$, on a : $\left[\int_0^x u(t) \cdot v(t) dt \right]^2 \leq \int_0^x u^2(t) dt \cdot \int_0^x v^2(t) dt$.

b) Dédurre de a) que si u et v sont éléments de L^2 , alors $\int_0^{+\infty} u(x) \cdot v(x) dx$ est absolument convergente et que l'on a : $\left[\int_0^{+\infty} u(x) v(x) dx \right]^2 \leq \int_0^{+\infty} u^2(x) dx \cdot \int_0^{+\infty} v^2(x) dx$

N.B. : question à traiter soigneusement.

c) Montrer alors que, sur L^2 , la forme bilinéaire $B(u, v) = \int_0^{+\infty} u(x) v(x) dx$ est définie positive. On note : $u * v = B(u, v)$.

2°) Soit f un élément de L^2 .

a) Montrer que, si $x \neq 0$ et $a > 3/4$, alors $J_a(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t f(t)}{(t^2 + x^2)^a} dt$ existe. On pose alors $j(x) = J_1(x)$.

b) Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(t^2 + x^2)^2} dt$ puis démontrer que si $x > 0$, $j(x)^2 \leq \frac{\pi}{4x} \cdot f * f$.

c) $x > 0$ étant fixé, h un réel tel que : $x+h > x/2$, montrer l'inégalité : $|j(x+h) - j(x)| \leq \frac{4|h(2x+h)|}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{t|f(t)|}{t^2 + x^2} dt$. En déduire que j est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3°) Soit $i(x)$ définie par : $i(x) = \frac{x}{(x+1)^2} j(x)$ si $x > 0$ et $i(0) = 0$. Montrer que i appartient à L^2 et que : $i * i \leq \frac{\pi}{24} f * f$