

PROBLEME.

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; E est l'e.v. associé. On définit les ensembles:

$$T = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3, x+y+z=1\}$$

$$\Delta = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3, x+y+z \leq 1\}$$

Donner une interprétation géométrique de T et Δ .

I. 1°. A toute matrice $A \in GL_3(\mathbb{R})$ on associe $\hat{A}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui admet A pour matrice / $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit $\mathcal{B} \subset GL_3(\mathbb{R})$ défini par:

$A \in \mathcal{B} \Leftrightarrow \hat{A}(T) \subset T$. Trouver un ensemble de CNS sur les coefficients de A pour que $A \in \mathcal{B}$. Si $A \in \mathcal{B}$, a-t-on $\hat{A}(\Delta) \subset \Delta$?

2°. Soit $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B} \cap O_3(\mathbb{R})$ ($O_3(\mathbb{R})$ groupe orthogonal de $GL_3(\mathbb{R})$). Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{B}_1$; peut-on dire que $\mathcal{B}_1$ est un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$? Donner une interprétation géométrique pour chacune matrice de $\mathcal{B}_1$.

II. Dans cette partie, on prend $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1°. Quelle est l'image de T par $\hat{A}$?

2°. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0) \in T$, on définit la suite de points M_n par $M_n = \hat{A}(M_{n+1})$. Calculer x_n, y_n en fonction de n ; en déduire la limite de M_n quand $n \rightarrow +\infty$.

3°. On définit ensuite K_n par $\vec{OK}_n = \sum_{m=0}^n \left(\frac{4}{5}\right)^m \vec{OM}_m$. On note $K(M_0)$ la limite de K_n quand $n \rightarrow +\infty$. Quel est l'ensemble décrit par $K(M_0)$ quand M_0 décrit T ?

III. Soit $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, on note $E_1 = E - \{\vec{0}\}$ et $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - \{O\}$. On définit:

$f: \vec{v} \in E_1 \rightarrow \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$ (où $\|\vec{v}\|$ est la norme euclidienne de $\vec{v}$) et $g: M \in \mathcal{E}_1 \rightarrow M' = O + f(\vec{OM})$.

1°. Déterminer $g(T)$.

2°. Montrer que f est différentiable sur E_1 ; écrire la matrice jacobienne de f en $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; donner une interprétation géométrique simple de la différentielle de f en $\vec{i}$.

3°. Montrer que la différentielle de f en $\vec{v}$ est le produit d'une homothétie et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan que l'on précisera.