

où $(f, g) \in F^2$. On admet que ① et ② admettent des solutions définies sur I . ②

I. Etude des solutions de ② assujetties à des conditions aux limites:

On se propose de déterminer, si elles existent, les solutions $z \neq 0$ de ② vérifiant $z(a) = z(b) = 0$ ③. On admet que les solutions de ② constituent un s.e.v. G de dimension 2 de l'e.v. E .

1°. Montrer qu'une CNS pour que 2 solutions z_1 et z_2 de ② soient linéairement indépendantes est que : $\Delta(z_1, z_2)(x) = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix}$ soit constant et non nul sur I .

On suppose dans la suite que z_1 et z_2 forment une base de G .

2°. Selon les valeurs de $z_1(a)z_2(b) - z_1(b)z_2(a)$, déterminer le nombre de solutions de l'équation ② satisfaisant les conditions aux limites ③.

II. Recherche de la solution de ① assujettie à des conditions aux limites:

On note y_0 une solution particulière de ①.

1°) Montrer que la condition $z_1(a)z_2(b) - z_2(a)z_1(b) \neq 0$ est une CNS pour que ① ait une seule solution s'annulant en a et b ((z_1, z_2) base de G).

On suppose cette condition réalisée dans la suite du II.

2°) Montrer qu'il existe 2 solutions non nulles de ② vérifiant:

$z_3(a) = 0$ ⑤ et $z_4(b) = 0$ ⑥; montrer que (z_3, z_4) est une base de G .

3°) Montrer que l'on a : $\Delta(z_3, z_4)(x) = -z_3'(a)z_4(a) = z_3(b)z_4'(b)$.

En déduire que l'on peut choisir z_3 et z_4 de telle sorte que $\Delta(z_3, z_4)(x) = 1$ pour tout x de I , sans modifier la généralité du problème.

4°) On suppose $\Delta(z_3, z_4)(x) = 1$ pour tout x de I et on définit:

$$G(x, t) = \begin{cases} G_1(x, t) = z_3(x)z_4(t) & \text{si } a \leq x \leq t \leq b \\ G_2(x, t) = z_3(t)z_4(x) & \text{si } a \leq t \leq x \leq b \end{cases} \quad ⑦$$

On remarquera, sans le démontrer, que la fonction $G(x, t)$ est symétrique et continue. Montrer que G vérifie :

a) $\frac{\partial G}{\partial x}$ est définie $\forall (x, t) \in I^2$: $x \neq t$ et elle possède, à t